Метод математической индукции

1. Докажите, что $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ корней}} < 2.$

2. Докажите, что правильный треугольник можно разрезать на n правильных треугольников для любого $n \geqslant 6$.

3. Докажите, что $2^{3^n}+1 \,⋮\, 3^{n+1}$.

4. В некоторой стране любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно назначить столицу так, чтобы из нее можно было доехать до любого другого города, сделав не более одной пересадки.

5. Известно, что $a + {}^1\!/_a \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $a^n + {}^1\!/_{a^n} \in \mathbb{Z}$.

6. Докажите, что $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$.

7. Докажите, что банк может выдать любую сумму денег, начиная с восьми рублей, используя только 3-х и 5-рублевые купюры.

8. Докажите, что $10^n + 18n - 1 \,⋮\, 27$.

9. Докажите, что $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

10. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое количество меньших квадратов (не обязательно различных), большее 5.

11. Докажите, что $\forall n \in \mathbb{N}$ число, записываемое 3^n единицами, делится на 3^n.

12. Докажите тождество Кассини $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

13. В некоторой стране любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдутся два города, такие что из первого можно проехать во второй, побывав в каждом городе ровно один раз.

14. Дан квадрат 100×100. Каждая его клетка покрашена в один из четырех цветов, причем любой квадратик 2×2 содержит все четыре цвета. Докажите, что угловые клетки квадрата 100×100 разноцветны.

15. Докажите, что если n точек не лежат на одной прямой, то среди прямых, их соединяющих, не менее n различных.

16. Докажите методом матиндукции, что $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2} < 2$.

Метод математической индукции

1. Докажите, что $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ корней}} < 2$.

2. Докажите, что правильный треугольник можно разрезать на n правильных треугольников для любого $n \geqslant 6$.

3. Докажите, что $2^{3^n}+1 \,\vdots\, 3^{n+1}$.

4. В некоторой стране любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно назначить столицу так, чтобы из нее можно было доехать до любого другого города, сделав не более одной пересадки.

5. Известно, что $a + {}^{1}\!/_{a} \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $a^n + {}^{1}\!/_{a^n} \in \mathbb{Z}$.

6. Докажите, что $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$.

7. Докажите, что банк может выдать любую сумму денег, начиная с восьми рублей, используя только 3-х и 5-рублевые купюры.

8. Докажите, что $10^n + 18n - 1 \,\vdots\, 27$.

9. Докажите, что $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

10. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое количество меньших квадратов (не обязательно различных), большее 5.

11. Докажите, что $\forall n \in \mathbb{N}$ число, записываемое 3^n единицами, делится на 3^n.

12. Докажите тождество Кассини $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

13. В некоторой стране любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдутся два города, такие что из первого можно проехать во второй, побывав в каждом городе ровно один раз.

14. Дан квадрат 100×100. Каждая его клетка покрашена в один из четырех цветов, причем любой квадратик 2×2 содержит все четыре цвета. Докажите, что угловые клетки квадрата 100×100 разноцветны.

15. Докажите, что если n точек не лежат на одной прямой, то среди прямых, их соединяющих, не менее n различных.

16. Докажите методом матиндукции, что $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} < 2$.