

Вот и лето прошло...

1. Можно ли расставить в клетках квадрата 4×4 числа от 1 до 16 так, чтобы число в каждой клетке было или меньше всех чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, или больше всех этих чисел?

2. Найдите сумму углов при вершинах пятиконечной звезды.

3. Можно ли в выпуклом шестиугольнике провести несколько диагоналей так, чтобы каждая из них пересекала во внутренних точках ровно 3 других?

4. Чему равно произведение $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{225}\right)$?

5. На лужайке босоногих мальчиков столько же, сколько обутых девочек. Кого на лужайке больше — девочек или босоногих детей?

6. На множестве действительных чисел задана операция $*$, которая каждому двум числам a и b ставит в соответствие число $a * b$. Известно, что равенство $(a * b) * c = a + b + c$ выполняется для любых трех чисел a , b и c . Докажите, что $a * b = a + b$.

7. Витя задумал четырехзначное число и написал остатки от деления этого числа на 2, на 3, ..., на 101 (всего 100 остатков). Могло ли среди выписанных чисел оказаться не менее 20 семерок?

8. Даны 3 последовательности букв А и Б длины 100. Докажите, что существует еще одна последовательность этих букв длины 100, которая с каждой из данных различается не менее, чем в 50 местах.

9. Даны действительные числа $x, y \in (0, 1)$. Докажите, что $\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} < 1$.

10. Можно ли все ребра и диагонали правильного 55-угольника раскрасить в 54 цвета так, чтобы ребра, выходящие из одной вершины, были разного цвета?

11. Назовем человека *малообщительным*, если у него менее 10 знакомых. Назовем человека *чудаком*, если все его знакомые малообщительны. Докажите, что малообщительных людей больше, чем чудаков.

12. Докажите, что если для вписанного четырехугольника $ABCD$ выполнено равенство $CD = AD + BC$, то биссектрисы его углов A и B пересекаются на стороне CD .

Вот и лето прошло,	Все, что сбыться могло,	Понапрасну ни зло,
Словно и не бывало.	Мне, как лист пятипалый,	Ни добро не пропало,
На пригреве тепло.	Прямо в руки легло,	Все горело светло,
Только этого мало.	Только этого мало.	Только этого мало.

Жизнь брала под крыло,	Листьев не обожгло,
Берегла и спасала,	Веток не обломало...
Мне и вправду везло.	День промыт, как стекло,
Только этого мало.	Только этого мало.

Арсений Тарковский, 1967

Вот и лето прошло...

1. Можно ли расставить в клетках квадрата 4×4 числа от 1 до 16 так, чтобы число в каждой клетке было или меньше всех чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, или больше всех этих чисел?

2. Найдите сумму углов при вершинах пятиконечной звезды.

3. Можно ли в выпуклом шестиугольнике провести несколько диагоналей так, чтобы каждая из них пересекала во внутренних точках ровно 3 других?

4. Чему равно произведение $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{225}\right)$?

5. На лужайке босоногих мальчиков столько же, сколько обутых девочек. Кого на лужайке больше — девочек или босоногих детей?

6. На множестве действительных чисел задана операция $*$, которая каждому двум числам a и b ставит в соответствие число $a * b$. Известно, что равенство $(a * b) * c = a + b + c$ выполняется для любых трех чисел a , b и c . Докажите, что $a * b = a + b$.

7. Витя задумал четырехзначное число и написал остатки от деления этого числа на 2, на 3, ..., на 101 (всего 100 остатков). Могло ли среди выписанных чисел оказаться не менее 20 семерок?

8. Даны 3 последовательности букв А и Б длины 100. Докажите, что существует еще одна последовательность этих букв длины 100, которая с каждой из данных различается не менее, чем в 50 местах.

9. Даны действительные числа $x, y \in (0, 1)$. Докажите, что $\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} < 1$.

10. Можно ли все ребра и диагонали правильного 55-угольника раскрасить в 54 цвета так, чтобы ребра, выходящие из одной вершины, были разного цвета?

11. Назовем человека *малообщительным*, если у него менее 10 знакомых. Назовем человека *чудаком*, если все его знакомые малообщительны. Докажите, что малообщительных людей больше, чем чудаков.

12. Докажите, что если для вписанного четырехугольника $ABCD$ выполнено равенство $CD = AD + BC$, то биссектрисы его углов A и B пересекаются на стороне CD .

Вот и лето прошло,	Все, что сбыться могло,	Понапрасну ни зло,
Словно и не бывало.	Мне, как лист пятипалый,	Ни добро не пропало,
На пригреве тепло.	Прямо в руки легло,	Все горело светло,
Только этого мало.	Только этого мало.	Только этого мало.

Жизнь брала под крыло,	Листьев не обожгло,
Берегла и спасала,	Веток не обломало...
Мне и вправду везло.	День промыт, как стекло,
Только этого мало.	Только этого мало.

Арсений Тарковский, 1967