

# Элементарные функции. Параметры

## Нечто квадратичное

1. Найдите все действительные  $a$ , при которых уравнение  $x^2 - |x| + a = 0$  имеет единственный корень.

2. Пусть  $p, q$  — различные действительные числа. Докажите, что уравнения  $x^2 + px + q = 0$  и  $x^2 + qx + p = 0$  имеют общий корень в том и только в том случае, если  $1 + p + q = 0$ .

3. При каких  $a \in \mathbb{R}$  корни уравнения  $x^2 - ax + 1 = 0$  суть целые числа?

4. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнения  $x^2 + ax + 8 = 0$  и  $x^2 + x + a = 0$  имеют хотя бы один общий корень.

5. График квадратичной функции  $y(x) = ax^2 + bx + c$  пересекает ось  $OY$  в точке, лежащей ниже оси  $OX$ . Найти знак коэффициента  $b$ , если  $x_1, x_2$  — координаты точек пересечения этой параболы с осью  $OX$  — удовлетворяют неравенству

$$(a) \quad 1/x_1 + 1/x_2 < 0; \quad (б) \quad x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 > 0.$$

6. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система имеет ровно четыре различных решения 
$$\begin{cases} \sqrt{|y+3|} = 1 - \sqrt{5|x|} \\ 16a - 9 - 6y = 25x^2 + y^2 \end{cases}$$

7. Найдите все действительные  $a$ , для которых корни  $x_1 < x_2$  уравнения

$$3x^2 - 4x - 4a = 0$$

удовлетворяют  $1/3 < x_1 < x_2 < 1$ .

8. Найдите все действительные  $p$ , при каждом из которых корни уравнения  $x^2 + px + 7 = 0$  таковы, что  $x_1 < 1 < x_2$ .

9. Найдите все действительные  $b$ , при которых уравнение  $2x^2 - 2(b+1)x + 3b = 0$  имеет хотя бы один корень в интервале  $(0; 1)$ .

10. Даны числа  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . Известно, что  $5a + 3b + 3c = 0$ . Докажите, что найдется корень  $x_0$  уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ , такой что  $0 \leq x_0 \leq 2$ .

11. Решите неравенство  $\sqrt{a^2 - x^2} > x + 1$ .

12. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2xy - ax - 2ay + a^2 - 2 = 0 \\ 4x^2 + 4y^2 - 8ax - 4ay - 7a^2 - 20a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

13. Найдите все пары  $p, q$ , при которых наибольшее значение выражения  $|x^2 + px + q|$  на отрезке  $x \in [-1; 1]$  является наименьшим возможным.

# Элементарные функции. Параметры

## Нечто квадратичное

1. Найдите все действительные  $a$ , при которых уравнение  $x^2 - |x| + a = 0$  имеет единственный корень.

2. Пусть  $p, q$  — различные действительные числа. Докажите, что уравнения  $x^2 + px + q = 0$  и  $x^2 + qx + p = 0$  имеют общий корень в том и только в том случае, если  $1 + p + q = 0$ .

3. При каких  $a \in \mathbb{R}$  корни уравнения  $x^2 - ax + 1 = 0$  суть целые числа?

4. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнения  $x^2 + ax + 8 = 0$  и  $x^2 + x + a = 0$  имеют хотя бы один общий корень.

5. График квадратичной функции  $y(x) = ax^2 + bx + c$  пересекает ось  $OY$  в точке, лежащей ниже оси  $OX$ . Найти знак коэффициента  $b$ , если  $x_1, x_2$  — координаты точек пересечения этой параболы с осью  $OX$  — удовлетворяют неравенству

$$(a) \quad 1/x_1 + 1/x_2 < 0; \quad (б) \quad x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 > 0.$$

6. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система имеет ровно четыре различных решения 
$$\begin{cases} \sqrt{|y+3|} = 1 - \sqrt{5|x|} \\ 16a - 9 - 6y = 25x^2 + y^2 \end{cases}$$

7. Найдите все действительные  $a$ , для которых корни  $x_1 < x_2$  уравнения

$$3x^2 - 4x - 4a = 0$$

удовлетворяют  $1/3 < x_1 < x_2 < 1$ .

8. Найдите все действительные  $p$ , при каждом из которых корни уравнения  $x^2 + px + 7 = 0$  таковы, что  $x_1 < 1 < x_2$ .

9. Найдите все действительные  $b$ , при которых уравнение  $2x^2 - 2(b+1)x + 3b = 0$  имеет хотя бы один корень в интервале  $(0; 1)$ .

10. Даны числа  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . Известно, что  $5a + 3b + 3c = 0$ . Докажите, что найдется корень  $x_0$  уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ , такой что  $0 \leq x_0 \leq 2$ .

11. Решите неравенство  $\sqrt{a^2 - x^2} > x + 1$ .

12. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2xy - ax - 2ay + a^2 - 2 = 0 \\ 4x^2 + 4y^2 - 8ax - 4ay - 7a^2 - 20a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

13. Найдите все пары  $p, q$ , при которых наибольшее значение выражения  $|x^2 + px + q|$  на отрезке  $x \in [-1; 1]$  является наименьшим возможным.