

Вероятность — 2

Условная вероятность, независимые события

1. Пусть в шляпе лежат k красных пластмассовых монеток, m чёрных пластмассовых, r красных деревянных и s чёрных деревянных. Покажите, что события “вынута красная монетка” и “вынута деревянная монетка” независимы тогда и только тогда, когда $k \cdot s = r \cdot m$.

2. Постройте пример таких трёх событий A , B , C , что $P(A|B) < P(A|\bar{B})$, $P(A|BC) > P(A|\bar{BC})$, $P(A|BC) > P(A|\bar{BC})$. Поймите, что существование таких событий несколько парадоксально.

3. Бросили две стандартные кости. Известно, что выпали числа разной чётности. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел больше 8?

4. Монетку бросили 9 раз.

(а) Какова вероятность того, что орёл выпадал только на нечётных бросках?

(б) Орёл выпал трижды. Какова вероятность того, что орёл выпадал только на нечётных бросках?

5. A и B играют в орлянку. Пророк предрёк им, что, если они бросят монетку $a + b$ раз, A выиграет a раз, а B , соответственно, — b раз (пусть $a \geq b$). Какова вероятность того, что в некоторый момент случится ничья?

6. **Парадокс независимости.** Бросаем две симметричные монетки. Рассмотрим события: “на первой монете выпал орёл”, “на второй монете выпал орёл”, “ровно на одной монете выпал орёл”. Покажите, что эти события попарно независимы (притом что любые два из них однозначно определяют третье).

7. Двое играют в орлянку, бросая монету N раз. Какова вероятность того, что по ходу игры ни разу не случится ничьей (т.е. не будет момента, к которому орлов и решек выпало бы поровну)?

8. Три охотника стреляют по медведю, i -й попадает с вероятностью p_i (и промахивается с вероятностью q_i). Получив k попаданий, медведь сдаётся в плен с вероятностью λ_k . Какова вероятность, что медведь таки сдаётся в плен?

9. **Тройная дуэль.** Три стрелка решили драться на дуэли. A , стреляя, ранит противника с вероятностью 0,4; B — с вероятностью 0,7; C — с вероятностью 1. Дуэлянты стреляют по циклу ABC начиная с A , раненый выбывает, побеждает последний оставшийся. Какова вероятность победы A и в кого он для этого должен стрелять?

10. **Парадокс узника.** Завтра утром двое из трёх заключённых A , B , C будут казнены, но не знают, кто именно из них выживет. A рассуждает: “Сейчас для меня вероятность выжить равна $1/3$. Если я попрошу охранника сказать, кто из B и C будет завтра казнён, и он мне ответит, я буду знать имя одного из обречённых, тогда я буду вторым с вероятностью $1/2$ и мои шансы на выживание повысятся.” Однако охранник, ответив, кажется, не сообщит A ничего нового: A и так знает, что один из B и C завтра будет казнён.

Вероятность — 2

Условная вероятность, независимые события

1. Пусть в шляпе лежат k красных пластмассовых монеток, m чёрных пластмассовых, r красных деревянных и s чёрных деревянных. Покажите, что события “вынута красная монетка” и “вынута деревянная монетка” независимы тогда и только тогда, когда $k \cdot s = r \cdot m$.

2. Постройте пример таких трёх событий A , B , C , что $P(A|B) < P(A|\bar{B})$, $P(A|BC) > P(A|\bar{BC})$, $P(A|BC) > P(A|\bar{BC})$. Поймите, что существование таких событий несколько парадоксально.

3. Бросили две стандартные кости. Известно, что выпали числа разной чётности. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел больше 8?

4. Монетку бросили 9 раз.

(а) Какова вероятность того, что орёл выпадал только на нечётных бросках?

(б) Орёл выпал трижды. Какова вероятность того, что орёл выпадал только на нечётных бросках?

5. A и B играют в орлянку. Пророк предрёк им, что, если они бросят монетку $a + b$ раз, A выиграет a раз, а B , соответственно, — b раз (пусть $a \geq b$). Какова вероятность того, что в некоторый момент случится ничья?

6. **Парадокс независимости.** Бросаем две симметричные монетки. Рассмотрим события: “на первой монете выпал орёл”, “на второй монете выпал орёл”, “ровно на одной монете выпал орёл”. Покажите, что эти события попарно независимы (притом что любые два из них однозначно определяют третье).

7. Двое играют в орлянку, бросая монету N раз. Какова вероятность того, что по ходу игры ни разу не случится ничьей (т.е. не будет момента, к которому орлов и решек выпало бы поровну)?

8. Три охотника стреляют по медведю, i -й попадает с вероятностью p_i (и промахивается с вероятностью q_i). Получив k попаданий, медведь сдаётся в плен с вероятностью λ_k . Какова вероятность, что медведь таки сдаётся в плен?

9. **Тройная дуэль.** Три стрелка решили драться на дуэли. A , стреляя, ранит противника с вероятностью 0,4; B — с вероятностью 0,7; C — с вероятностью 1. Дуэлянты стреляют по циклу ABC начиная с A , раненый выбывает, побеждает последний оставшийся. Какова вероятность победы A и в кого он для этого должен стрелять?

10. **Парадокс узника.** Завтра утром двое из трёх заключённых A , B , C будут казнены, но не знают, кто именно из них выживет. A рассуждает: “Сейчас для меня вероятность выжить равна $1/3$. Если я попрошу охранника сказать, кто из B и C будет завтра казнён, и он мне ответит, я буду знать имя одного из обречённых, тогда я буду вторым с вероятностью $1/2$ и мои шансы на выживание повысятся.” Однако охранник, ответив, кажется, не сообщит A ничего нового: A и так знает, что один из B и C завтра будет казнён.