

Вероятность — 1

Задачи для затравки

1. В одной из трех коробок лежит приз, две другие коробки пустые. Вы не знаете, в какой из коробок находится приз, а ведущий знает. Вы должны показать на одну из коробок, в которой по Вашему мнению находится приз. После этого ведущий открывает одну из двух оставшихся коробок. Так как он не хочет сразу отдавать приз, он открывает пустую коробку. После этого Вам предлагается окончательно выбрать коробку. Нужно ли менять первоначальный выбор?

2. В окружности проводится случайная хорда. Какова вероятность того, что эта хорда длиннее стороны вписанного в окружность равностороннего треугольника? Рассмотрите три модели:

- (а) один конец хорды фиксируется, второй выбирается случайно,
- (б) случайно выбирается середина хорды,
- (в) направление хорды фиксируется, положение выбирается случайно.

Простая вероятность

3. В ящике имеется 10 белых и 15 черных шаров. Из ящика вынимаются 4 шара. Какова вероятность того, что все вынутые шары будут белыми?

4. Игральной костью назовем кубик, на гранях которого написаны числа (в стандартном случае — строго по одному разу числа от 1 до 6; однако возможны и нестандартные кости). Бросим две

- (i) различные (ii) одинаковые стандартные кости.

(а) Сколько в этой ситуации элементарных исходов?

(б) Найдите вероятности следующих случайных событий: “Выпали одинаковые числа”; “Выпали соседние числа”; “Сумма выпавших чисел равна 9”; “Сумма выпавших чисел равна 10”; “Сумма выпавших чисел больше 9”; “Выпали числа разной чётности”.

5. На лотерейном билете требуется отметить 8 клеточек из 64. Какова вероятность того, что после розыгрыша, в котором также будет выбрано 8 каких-то клеток из 64 (все такие возможности равновероятны), окажется, что угаданы...
... ровно 4 клетки? ... ровно 5 клеток? ... все 8 клеток?

6. Имеется три ящика, в каждом из которых лежат шары с номерами от 0 до 9. Из каждого ящика вынимается по одному шару. Какова вероятность того, что...
... вынуты три единицы; ... вынуты три равных числа?

7. В классе 25 учеников. Что более вероятно: что у каких-нибудь двух учеников совпадают дни рождения или что не совпадают?

8. У игрока в преферанс оказалось 4 козыря, а еще 4 находятся на руках у двух его противников. Какова вероятность того, что козыри лягут...

... 2 : 2? ... 3 : 1? ... 4 : 0?

9. Пишется наудачу некоторое двузначное число. Какова вероятность того, что сумма цифр этого числа равна 5?

10. Двое друзей договорились встретиться между 16 и 17 часами. Каждый из них приходит между 16 и 17 часами в обусловленное место встречи и ждет 5 минут. Не дождавшись, друзья уходят обратно. Какова вероятность того, что они встретятся?

11. На стороне AB треугольника ABC выбираются точки M, N , а на стороне AC — точки P, Q . Найдите вероятность того, что отрезки MP и NQ пересекаются.

12. **Нетранзитивные кости.** Разрешим повторять числа на гранях кубика, получая, например, кубики вида 2, 2, 2, 5, 5, 5. Одну кость назовём сильнее другой, если с вероятностью больше $1/2$ на первой кости выпадает больше, чем на второй. Три нестандартные кости назовём нетранзитивными, если первая кость сильнее второй, вторая — третьей, а третья — первой.

(а) Постройте три нетранзитивные нестандартные кости.

(б) Разрешим ставить на гранях кости произвольные натуральные числа. Постройте три нетранзитивных кубика с различными числами на гранях.

(в) Представим себе невозможное: кубик, у которого необязательно шесть граней. Назовём такой кубик рулеткой (с чего бы?). Для любого натурального $N > 2$ построьте семейство из N рулеток, каждая из которых сильнее предыдущей (по циклу).

13. Двое бросают монету: один бросил ее 10 раз, другой — 11 раз. Чему равна вероятность того, что у второго монета упала орлом большее число раз, чем у первого?

14. Трое друзей решают жребием, кто идет за соком. У них есть одна монета. Как им устроить жребий, чтобы все имели равные шансы бежать?

15. При посадке в самолет выстроилась очередь из n пассажиров, у каждого из которых имеется билет на одно из n мест. Первой в очереди стоит сумасшедшая старушка. Она вбегает в салон и садится на случайное место (возможно, и на свое). Далее пассажиры по очереди занимают свои места, а в случае, если свое место уже занято, садятся случайным образом на одно из свободных мест. Какова вероятность того, что последний пассажир займет свое место?

16. В каждую жевачку вложен один из n вкладышей, причем каждый вкладыш встречается с вероятностью $1/n$. Сколько в среднем надо купить жевачек, чтобы собрать полную коллекцию вкладышей?