2014 中国女子数学奥林匹克

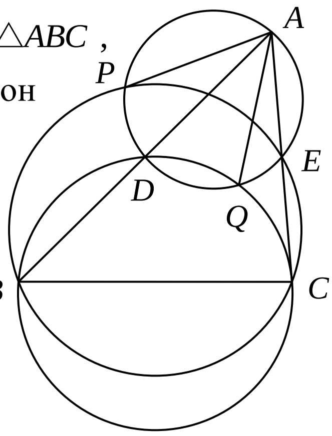
День II

8:00 ~ 12:00 13th Августа 2014

广东中山　华南师范大学中山附属中学

5. Пусть a - натуральное число, не являющееся полным квадратом, и r - вещественный корень уравнения $x^3-2ax+1=0$. Докажите, что число $r+\sqrt{a}$ является иррациональным.

6. Как показано на рисунке, в остроугольном $\triangle ABC$, $AB>AC$, а точки D, E являются серединами сторон AB, AC соответственно. Окружности, описанные около $\triangle ADE$ и $\triangle BCE$, пересекаются в двух различных точках P и E. Окружности, описанные около $\triangle ADE$ и $\triangle BCD$, пересекаются в двух различных точках Q и D. Докажите, что $AP=AQ$.



7. Для любого непустого конечного множества X вещественных чисел, обозначим через $|X|$ количество различных элементов X, и положим $f(X)=\frac{1}{|X|}\sum_{a\in X} a$. Пусть (A,B) - это упорядоченная пара подмножеств множества целых чисел, удовлетворяющая следующим условиям: $A\bigcup B=\{1, 2,\cdots,100\}$,, $A\cap B=\varnothing$ и $1\le |A|\le 98$. Для всех p, принадлежащих B, положим $A_p = A\bigcup\{p\}$, и $B_p=B\setminus\{p\}$. Для всех возможных пар (A,B) и p из B, удовлетворяющих указанным условиям, найдите максимальное значение выражения

$$\left(f(A_p)-f(A)\right)\left(f(B_p)-f(B)\right).$$

8. Пусть n - некоторое натуральное число, и S - множество, состоящее из всех натуральных чисел m, не превосходящих n и взаимно простых с ним. Положим $S_1=S\bigcap(0,\frac{n}{3}]$, $S_2=S\bigcap(\frac{n}{3},\frac{2n}{3}]$ и $S_3=S\bigcap(\frac{2n}{3},n]$. Пусть $|S|$ делится нацело на 3. Докажите, что $|S_1|=|S_2|=|S_3|$.