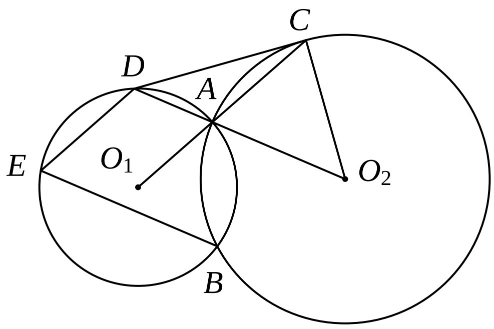
2014 中国女子数学奥林匹克

День I

12 Августа 2014 8:00 ~ 12:00

Zhongshan Guangdong

1．Как показано на рисунке, окружность с центром O_1 пересекает окружность с центром O_2 в точках A и B, луч O_1A повторно пересекает окружность с центром O_2 в точке C, а луч O_2A повторно пересекает окружность с центром O_1 в точке D. Прямая BE, проходящая через точку B параллельно O_2A, повторно пересекает окружность с центром O_1 в точке E. Оказалось, что $DE \parallel O_1A$. Докажите, что $DC \perp CO_2$.



2．Задано натуральное число $n \geq 2$. Числа $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}$ таковы, что $[x_1], [x_2], \cdots, [x_n]$ - это перестановка чисел $1, 2, \cdots, n$. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $\sum_{i=1}^{n-1} [x_{i+1} - x_i]$.

(Замечание: для вещественного числа x, $[x]$ обозначает максимальное целое число, не превосходящее x.)

3．В группе из n учащихся любые двое либо знакомы, либо не знакомы. Каждый из них знаком ровно с d девушками из этой группы и ровно с d юношами из этой группы. Найдите все возможные пары (n, d), где n и d - натуральные числа.

4．Для каждого натурального $m \geq 4$, обозначим через T_m количество целочисленных последовательностей $a_1, a_2, \ldots, a_m$, удовлетворяющих следующим условиям:

(1) $a_i \in \{1, 2, 3, 4\}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$;

(2) $a_1 = a_m = 1$, $a_2 \neq 1$;

(3) $a_i \neq a_{i-1}$, $a_i \neq a_{i-2}$ для всех $i = 3, 4, \ldots, m$.

Докажите, что существует геометрическая последовательность $\{g_n\}$, все члены которой положительны, такая что для любого натурального $n \geq 4$, $g_n - 2\sqrt{g_n} < T_n < g_n + 2\sqrt{g_n}$.