Сентябрьская олимпиада (устный тур)

Довывод

1. На утреннике каждый мальчик подарил по конфете каждой девочке, а каждая девочка подарила по конфете каждому мальчику. После этого каждый мальчик съел по две конфеты, а каждая девочка скушала по три конфеты. Известно, что общее количество съеденных конфет составляет четверть от числа всех подаренных. Какое наибольшее число детей могло быть на утреннике?
2. Найдите все конечные множества натуральных чисел S такие, что для любых (не обязательно различных) $i, j \in S$ число $\frac{i+j}{(i,j)}$ также принадлежит S . (Через (i, j) обозначается наибольший общий делитель i и j .)
3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом $\angle A$ проведены биссектрисы CE и BD (соответственно, $E \in AB$ и $D \in AC$). Они пересекаются в точке I . Может ли оказаться, что все из отрезков AB, AC, BI, ID, CI и IE имеют целую длину?
4. В каждой клетке таблицы 101×101 написано число $+1$ или -1 . Произведение чисел в i -ой строке обозначим через R_i , произведение чисел в j -ом столбце — через C_j . Докажите, что число $C_1 + \dots + C_{101} + R_1 + \dots + R_{101}$ не равно нулю.
5. Про многочлен $p(x)$ степени n известно, что $p(k) = 1/k$ для всех $k = 1, \dots, n+1$. Найдите $p(n+2)$.

Вывод

6. Пусть натуральные числа p, q и r попарно взаимно просты. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед размера $p \times q \times r$. Обозначим через A одну из его вершин, а через B, C и D вершины смежные с ней. Через точки B, C и D проведена плоскость. Сколько единичных кубиков она пересекает?
7. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) углы C и D прямые. Окружность ω , построенная на AB как на диаметре, пересекает отрезок AD второй раз в точке P . Касательная к ω в точке P пересекает прямую CD в точке M . Вторая касательная из M к ω касается ω в точке Q . Докажите, что прямая BQ проходит через середину CD .
8. Даны натуральные m и n . Докажите, что существует натуральное s такое, что каждая ненулевая цифра входит в десятичные записи $s \cdot m$ и $s \cdot n$ одно и то же число раз.

Личная устная олимпиада. Продолжительность — 240 минут.

Полное решение каждой задачи стоит 1 балл. Неполное стоит 0 баллов.

На каждую задачу отводится 3 попытки.

Сентябрьская олимпиада (устный тур)

Довывод

1. На утреннике каждый мальчик подарил по конфете каждой девочке, а каждая девочка подарила по конфете каждому мальчику. После этого каждый мальчик слопал по две конфеты, а каждая девочка скушала по три конфеты. Известно, что общее количество съеденных конфет составляет четверть от числа всех подаренных. Какое наибольшее число детей могло быть на утреннике?
2. Найдите все конечные множества натуральных чисел S такие, что для любых (не обязательно различных) $i, j \in S$ число $\frac{i+j}{(i,j)}$ также принадлежит S . (Через (i, j) обозначается наибольший общий делитель i и j .)
3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом $\angle A$ проведены биссектрисы CE и BD (соответственно, $E \in AB$ и $D \in AC$). Они пересекаются в точке I . Может ли оказаться, что все из отрезков AB, AC, BI, ID, CI и IE имеют целую длину?
4. В каждой клетке таблицы 101×101 написано число $+1$ или -1 . Произведение чисел в i -ой строке обозначим через R_i , произведение чисел в j -ом столбце — через C_j . Докажите, что число $C_1 + \dots + C_{101} + R_1 + \dots + R_{101}$ не равно нулю.
5. Про многочлен $p(x)$ степени n известно, что $p(k) = 1/k$ для всех $k = 1, \dots, n+1$. Найдите $p(n+2)$.

Вывод

6. Пусть натуральные числа p, q и r попарно взаимно просты. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед размера $p \times q \times r$. Обозначим через A одну из его вершин, а через B, C и D вершины смежные с ней. Через точки B, C и D проведена плоскость. Сколько единичных кубиков она пересекает?
7. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) углы C и D прямые. Окружность ω , построенная на AB как на диаметре, пересекает отрезок AD второй раз в точке P . Касательная к ω в точке P пересекает прямую CD в точке M . Вторая касательная из M к ω касается ω в точке Q . Докажите, что прямая BQ проходит через середину CD .
8. Даны натуральные m и n . Докажите, что существует натуральное s такое, что каждая ненулевая цифра входит в десятичные записи $s \cdot m$ и $s \cdot n$ одно и то же число раз.

Личная устная олимпиада. Продолжительность — 240 минут.

Полное решение каждой задачи стоит 1 балл. Неполное стоит 0 баллов.

На каждую задачу отводится 3 попытки.