

Комбинаторика — 1

Число сочетаний

1. На дискотеке собрались 10 юношей и 9 девушек. Сколькими способами они могут составить 5 пар для участия в танце?

2. На плоскости даны 13 точек, 5 из которых лежат на одной прямой. Никакие три из этих точек (кроме названных пяти) не лежат на одной прямой. Найдите число треугольников с вершинами в данных точках.

3. Сколькими способами можно разбить класс из 24 человек на 4 волейбольные команды?

4. Сколькими способами можно выбрать двух мужчин и двух женщин на четыре различные должности, если имеется десять кандидатов на эти должности, из которых шестеро — мужчины и четверо — женщины?

5. На окружности даны n точек. Проводятся всевозможные хорды, соединяющие пары точек, причем никакие три хорды не пересекаются в одной точке. Найдите число точек пересечения. (Иными словами, число точек пересечения диагоналей выпуклого n -угольника.)

6. Сколькими способами можно представить число n в виде суммы k слагаемых (суммы, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными), если...

(а) ... все слагаемые натуральны?

(б) ... все слагаемые целые неотрицательные?

(в) ... все слагаемые целые и больше либо равны 5?

(г) ... все слагаемые целые и больше либо равны $s \in \mathbb{Z}$?

7. Хромой король — фигура, которая за один ход может передвинуться либо на одну клетку вниз, либо на одну клетку вправо. Сколькими способами белый хромой король может добраться от поля $a8$ до поля

(а) $c6$? (б) $d7$? (в) $d5$? (г) $h1$?

(Нижняя горизонталь — 1, левая вертикаль — a .)

8. При раскрытии скобок в выражении

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^m$$

получается сумма выражений вида

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n},$$

в которых $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, \dots, k_n \geq 0, k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$.

(а) Сколько раз встречается каждое из таких слагаемых?

(б) Сколько всего различных слагаемых в этой сумме?