1 Интеграл Лейбница

Интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, согласно Лейбницу, представляет собой сумму бесконечно большого числа бесконечно-малых слагаемых, индексированных точками x отрезка $[a, b]$. Слагаемые в этой сумме имеют вид произведения конечной величины $f(x)$, зависящей от точки x, на бесконечно-малую величину dx, называемую *дифференциалом* переменной x. Бесконечно-малая величина dx предполагается имеющей фиксированное (не зависящее от точки x) значение. Согласно Лейбницу то, что мы называем "точками"числовой прямой, на самом деле являются бесконечно-малыми отрезками, длины которых равна дифференциалу dx. При этом суммарная длина этих точек-отрезков, принадлежащих данному интервалу $[a, b]$ как раз и равна длине этого интервала. Таким образом, получается следующее *основное правило интегрирования*:

$$\int\limits_a^b dx = b - a \tag{1}$$

Согласно этой логике количество слагаемых в указанном интеграле представляет собой бесконечно-большую величину $\frac{b-a}{dx}$. Если все слагаемые в сумме одинаковы и равны cdx, то их сумму логично предполагать равной произведению их количества на величину одного слагаемого $cdx\frac{b-a}{dx} = c(b-a)$. Таким образом мы приходим к следующему *правилу интегрирования постоянной*:

$$\int\limits_a^b c\,dx = c(b - a) \tag{2}$$

По аналогии с рядами, следует ожидать, что интегралы удовлетворяют следующим *правилам сложения и умножения*:

$$\int\limits_a^b cf(x)\,dx = c\int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{3}$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx = \int\limits_a^b (f(x) + g(x))\,dx \tag{4}$$

Наконец, следующее *правило деления* интегралов

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx, \tag{5}$$

уже позволяет формально, методом авторекурсии, вычислять интегралы $\int\limits_0^1 x^n\,dx$. Рассмотрим для примера интеграл $\int\limits_0^1 x\,dx$. Отщепим от него кусочек:

$$\int\limits_0^1 x\,dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x\,dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 x\,dx.$$

Замена индекса суммирования $x \to x + \frac{1}{2}$ превращает интеграл $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x\,dx$ в равный ему $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} (x + \frac{1}{2})\,dx$. Действительно, справедливо следующее общее *правило сдвига переменной*:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx, \tag{6}$$

аналогичное правилу сдвига индексов для сумм рядов. В его обоснование можно заметить, что между слагаемыми обоих интегралов имеется взаимно-однозначное соответствие: слагаемому $f(x)dx$ с индексом x в левом интеграле соответствует слагаемое с индексом $x+c$ в правом, которое также равно $f(x)dx$. Таким образом два интеграла состоят из одних и тех же слагаемых и мы вправе рассчитывать на их равенство. Правило сдвига вместе с правилами сложения и интегрирования константы позволяют провести такое вычисление:

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x\,dx = \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} (x + \frac{1}{2})\,dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{d} x + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x\ dx = \frac{1}{2} + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x\,dx \tag{7}$$

Откуда получаем

$$\int\limits_{0}^{1} x\,dx = 2\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} x\,dx + \frac{1}{2} \tag{8}$$

Для получения уравнения авторекурсии нам нужно научиться делать замену переменной, изменяющую длину промежутка интегрирования. Простейшей заменой такого типа является растяжение $x \to kx$ с некоторым коэффициентом k. Итак, попробуем сделать замену переменной $y = kx$ в интеграле $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$. Если x меняется от a до b, то y меняется от ka, до kb и наш интеграл превращается в $\int\limits_{ka}^{kb} f(y)\,dy$. Теперь, казалось бы, мы вправе просто заменить в полученном выражении y на x. Разве не все ли равно какой буквой обозначить индекс суммирования? Оказывается это не все равно. Величина дифференциала dy оказывается отличной от dx. Действительно, гомотетия с коэффициентом k меняет размеры всех отрезков, умножая их на k. Это относится и к бесконечно-малым отрезкам! Поэтому образом отрезка длины dx будет отрезок длины $dy = kdx$. Таким образом мы приходим к следующему правилу замены переменной:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = k\int\limits_{ka}^{kb} f(x/k)\,dx. \tag{9}$$

Вот почему Лейбницу было важно считать точки прямой бесконечно-малыми отрезками! Точки не имеют размера и гомотетия не меняет их. Теперь мы достаточно вооружены, чтобы получить уравнение авторекурсии для интеграла $\int\limits_0^1 x\,dx$. А именно, замена переменной $y = 2x$ позволяет получить соотношение

$$\int\limits_0^1 x\,dx = 4\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x\,dx.$$

Это соотношение вместе с равенством (8) позволяют получить: $\int\limits_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

Интегралы от степеней $\int\limits_0^1 x^n\,dx$ можно посчитать методом авторекурсии по той же схеме, по которой был выше посчитан $\int\limits_0^1 x\,dx$. Замена переменной $y = ax$ позволяет получить значение интеграла $\int\limits_0^a x^n\,dx$, зная значение $\int\limits_0^1 x^n\,dx$. А так как $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_0^b f(x)\,dx - \int\limits_0^a f(x)\,dx$, то мы можем посчитать все интегралы типа $\int\limits_a^b x^n\,dx$. Это дает принципиальную возможность вычисления интегралов $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ для функций, разложения которых в степенные ряды нам известны.

Интегралы и неравенства. Если интеграл — это сумма, то логично ожидать, что увеличение всех слагаемых влечет увеличение суммы. Это приводит нас к следующему *правилу интегрирования неравенств*:

$$\text{Если } f(x) \geq g(x) \text{ при любом } x \in [a,b], \text{ то } \int\limits_a^b f(x)\,dx \geq \int\limits_a^b f(x)\,dx \qquad (10)$$

Интегральные суммы Правила интегрирования неравенств и констант вместе с правилом деления интегралов позволяют любой интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ посчитать с любой степенью точности.

Разбиение отрезка интегрирования $[a,b]$ на части, порождаемое последовательностью $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, дает представление интеграла по $[a,b]$ в виде суммы интегралов по его частям

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,dt$$

для любого слагаемого справа справедливы неравенства

$$(x_k - x_{k-1}) \min f[x_{k-1}, x_k] \leq \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,dt \leq (x_k - x_{k-1}) \max f[x_{k-1}, x_k]$$

Поэтому исходный интеграл заключен между двумя суммами: *верхней интегральной суммой* $\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \max f[x_{k-1}, x_k]$ и *нижней интегральной суммой* $\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \min f[x_{k-1}, x_k]$. Причем разность между верхней и нижней суммами для монотонной функции не превосходит $|f(b) - f(a)| \max(x_k - x_{k-1})$. Поэтому при измельчении разбиений разность между верхними и нижними интегральными суммами стремится к нулю, поэтому как те так и другие стремятся к интегралу.

Дифференциал функции На самом деле это формула не вполне точная. Она представляет собой лишь *относительное равенство* в следующем смысле: две величины считаются относительно равными, если их отношение бесконечно-мало отличается от единицы. Но этого хватает для вычисления интегралов в силу следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $F(x, dx)$ и $G(x, dx)$ представляют собой относительно равные бесконечномалые величины, тогда их интегралы по любому промежутку отличаются на бесконечномалую величину.*

Доказательство. Предположим сначала, что все рассматриваемые величины положительны. Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_a^b F(x, dx) \leq \int\limits_a^b G(x, dx) + \varepsilon$$

Поскольку для любого большего единицы q справедливы неравенства $F(x) \leq qG(x)$, то интегрирование этих неравенств с использованием дистрибутивности интегрирования дает неравенства

$$I(F) = \int\limits_a^b F(x) \leq q \int\limits_a^b G(x) = qI(G)$$

откуда при $q < 1 + \varepsilon/I(G)$ следует обещанное. Аналогично доказывается противоположное неравенство. В результате, разность $|I(F) - I(G)| < \varepsilon$ для любого положительного стандартного ε. Откуда и следует бесконечная малость этой разности. $\square$

Доказанная теорема обосновывает *правило пренебрежения* при вычислении дифференциалов, по которому бесконечно-малыми величинами можно пренебрегать по сравнению с конечными. Например, вычисляя по формуле (**??**) дифференциал функции x^n, получаем

$$dx^n = (x + dx)^n - x^n = nx^{n-1}dx + C_n^2 x^{n-2}(dx)^2 + \cdots = nx^{n-1}dx$$

Последнее равенство относительное и означает, что отношение его левой и правой частей отличается от единицы на бесконечномалую величину.

Геометрические применения. Метод неделимых Применения анализа бесконечномалых к геометрическим задачам определения площадей и объемов были разработаны Кавальери под именем *метода неделимых*. Название метода исходит из принципа существования бесконечномалых неделимых элементов континуума. Но на самом деле для применения метода важна не собственно неделимость элементов континуума, а их бесконечная малость, выводимая из их неделимости. Ссылка на существование неделимых позволяет избежать конкретизации процесса получения разбиения на бесконечномалые элементы.

Кеплеру принадлежит следующее доказательство теоремы Архимеда о том, что площадь кругового сектора OPQ (O — центр окружности) равна половине произведения его радиуса $R = OP = OQ$ на длину дуги PQ, на которую он опирается.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетом AB длины R и катетом AC равным длине дуги PQ. Тогда нам нужно доказать равновеликость ABC и OPQ. Разделим катет BC и дугу PQ на бесконечно большое число бесконечномалых отрезков последовательным делением пополам. Так что между получившимися элементами разбиения имелось взаимно однозначное соответствие и длины всех элементов были одинаковы. Назовем элементарным треугольником (сектором) треугольник (сектор) с вершиной A (соотв. O), основанием которого служит элементарный бесконечномалый отрезок (дуга окружности). Тогда сумма (интеграл) площадей элементарных треугольников равен площади треугольника ABC, а сумма (интеграл) площадей элементарных секторов равна площади сектора OPQ. А так как площадь элементарного треугольника отличается от площади элементарного сектора на бесконечномалую второго порядка, то их суммы-интегралы отличаются на бесконечномалую величину. Что и требовалось доказать.

Чтобы вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком положительной функции $f(x)$ а снизу отрезком $[a, b]$ оси абсцисс разделим этот отрезок на бесконечно большое число бесконечномалых отрезков. Пусть dx обозначает длину бесконечномалого отрезка, расположенного в точке x. Тогда площадь криволинейной трапеции с основанием в этом бесконечно малом отрезке обозначаемая ds будет отличаться от $f(x)dx$, выражающую площадь прямоугольника с основанием dx и высоты $f(x)$ на бесконечномалую величину второго порядка ($< df(x)dx$). Поэтому суммарная площадь этих бесконечномалых прямоугольников, выраженная интегралом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ совпадает с точностью до бесконечномалых первого порядка с площадью криволинейной трапеции.

В частности, интеграл $\int\limits_a^b x^n\,dx$ выражает площадь под параболой $y = x^n$ над отрезком $[a, b]$. А так как $\frac{dx^{n+1}}{n+1}$ как нетрудно видеть отличается от $x^n dx$ на бесконечномалые высших по отношению dx порядков, то и интеграл $\int\limits_a^b x^n\,dx$ лишь на бесконечномалую величину отличается от $\frac{1}{n+1}\int\limits_a^b dx^{n+1} = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$. Таким образом анализ бесконечномалых позволяет легко решить задачу о квадратуре парабол.

При этом рассуждении равномерность разбиения отрезка интегрирования не использовалась. Поэтому оно проходит и для неравномерных разбиений. В частности, если x является функцией другой переменной $x(t)$. Поэтому интеграл Стильтьеса $\int\limits_{t_0}^{t_1} y(t)\,dx(t)$ также выражает соответствующую площадь.

Дифференциал функции $f(t)$ в точке t обозначается через $df(t)$ и выражает собой изменение значения функции на бесконечно малом интервале длины dt соответствующем числу t. Величина дифференциала зависит от величины dt и, следовательно, зависит от рассматриваемого разбиения интервала. Но независимо от типа разбиения в силу принципа интегрируемости имеет место равенство

$$\int\limits_a^b df(x) = f(b) - f(a) \tag{11}$$

Интегралом можно выразить также и объем пространственного тела. Предположим, что нам известно функция $s(t)$, выражающая площадь сечения этого тела горизонтальной плоскостью на высоте h. Тогда интеграл $\int\limits_a^b s(h)\,dh$ выражает объем тела, в случае, если оно заключено по высоте между a и b. Действительно, легко видеть, что отличие между объемом цилиндра высоты dh с основанием являющимся сечением тела плоскостью на высоте h и частью тела с высотами из h-го отрезка разбиения является бесконечномалой второго порядка.

Задачи.

1. Выразить интегралом площадь фигуры в полярных координатах.
2. Найти геометрический смысл интеграла $\int |df(x)|$.
3. Найти геометрический смысл интеграла $\int g(x)df(x)$.
4. Найти геометрический смысл интеграла $\int(g(x)df(x) - f(x)dg(x)$.