

Функции и графики — 1

Прямые на плоскости

1. Уравнение $ax + (1 - a)y = 1$ задает прямую при любом a (обоснуйте). Докажите, что все такие прямые проходят через одну точку.

2. Какое множество точек задает неравенство $ax + (1 - a)y > 1$? (Рассмотрите все возможные значения параметра a .)

3. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} (a - 4)x + y = a \\ -3x + ay = 1 \end{cases}$$

имеет больше одного решения?

4. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$|x + 2| + a|x - 4| = 6.$$

5. При каком значении b множество точек, координаты которых (x, y) удовлетворяют равенству $|x - 2y| = y$, совпадает с множеством точек, координаты которых удовлетворяют равенству $|2x - by| = x$?

6. Найдите все значения параметра a , при которых найдется b , такое что система

$$\begin{cases} 2x - y \leq 1 \\ y + 2x \leq 2 \\ y + ax \geq -1 \\ x^2 + y^2 \geq b \end{cases}$$

не имеет решений.

7. Найдите все значения a , при которых неравенство

$$|x + 1| + 2|x + a| > 3 - 2x$$

выполняется для любого x .

8. Дана координатная плоскость Oxy . Изобразите на этой плоскости множество точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют условиям

$$|x - y| \leq 1, \quad |2x + y| \leq 3.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $x + 2y$ при данных условиях.

9. Для каких значений a существует b такое, что

$$|7a - 3b| \leq 1 \quad \text{и} \quad |5a + 7b| \leq 1 ?$$

Функции и графики — 2

Коника на плоскости

1. Графики функций $y = 2x - x^2$ и $y = 2x^2 - 20x + 48$ пересечены прямой $y = a$. Найдите число точек пересечения в зависимости от a .

2. Угол, образованный лучами $y = x$ и $y = 2x$ при $x > 0$, высекает на параболе $y = x^2 + px + q$ две дуги. Эти дуги спроецированы на ось Ox . Докажите, что проекция одной дуги на 1 короче проекции другой.

3. Множество Φ состоит из точек, координаты которых (x, y) в прямоугольной системе координат удовлетворяют соотношению $y = |3x^2 - y|$. При каких значениях b прямая $y + 2x = b$ будет иметь ровно три общие точки с множеством Φ ?

4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 16 \\ (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 1. \end{cases}$$

5. Найдите все значения a , при которых уравнение $a|x - 5| = \frac{2}{x + 1}$ на промежутке $[0, +\infty)$ имеет ровно два корня.

6. Найдите максимальное значение выражения $2x - 3y + 1$, если числа x, y удовлетворяют равенству $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

7. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + a^2 \leq 4 \\ x - |a| \geq 0 \end{cases}$$

выполняется для всех x из отрезка $[\sqrt{2}; \sqrt{3}]$?

8. Найдите все значения a , при которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x + 1} - 3 \right| = ax + a - 2$$

на промежутке $(-1, +\infty)$ имеет более двух корней.

9. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 4)^2 + (y - 4)^2 = 9 \\ (x + 1)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет три решения.