ЛикБез по ОлМат

Арифметика

1. Каково наибольшее отношение трёхзначного числа к сумме его цифр?

2. Найдите сумму: $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{99\cdot 100}$.

3. Известно, что уравнение $ax^5+bx^4+c=0$ имеет три разных корня. Докажите, что уравнение $cx^5+bx+a=0$ также имеет три разных корня.

4. Суммы коэффициентов многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны 2 и 3 соответственно. Найдите сумму коэффициентов многочлена $P(x)Q(x)$.

5. Докажите, что если $x+y=z+t$, $x^2+y^2=z^2+t^2$, то $x^{100}+y^{100}=z^{100}+t^{100}$.

Геометрия

6. Дан угол с вершиной O. На одной его стороне отложены равные отрезки $OA=AB=BC$, а на другой стороне — равные отрезки $OD=DE=EF$. Докажите, что треугольники AEC и DBF равновелики.

7. Вписать в квадрат правильный треугольник наибольшей площади.

8. Найдите на данной прямой точку, из которой данный отрезок виден под наибольшим углом.

9. Каково максимальное число острых углов в выпуклом многоугольнике?

10. Докажите, что четыре круга, построенные на сторонах выпуклого четырёхугольника, как на диаметрах, полностью его покрывают.

Комбинаторика?

11. Числа $a,b\leqslant n$ дают одинаковые остатки при делении на все простые числа, меньшие n. Докажите, что $a=b$.

12. На столе лежат 100 спичек. Двое ходят по очереди. За ход можно взять 1, 2, 4, … (любую степень двойки) спичек. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или его партнер?

13. На бесконечном листе в клетку рисуют круги и считают, сколько узлов сетки в него попало. Для каждого ли натурального числа n существует круг, содержащий ровно n узлов?

14. Можно ли все натуральные числа раскрасить в два цвета так, чтобы не было бесконечной арифметической прогрессии одного цвета?

15. Круг радиуса 1 покрыт семью одинаковыми кругами. Докажите, что их радиус $\geqslant 1/2$.

Источник : «Как решают нестандартные задачи», А.Я. Канель-Белов, А.К. Ковальджи

ЛикБез по ОлМат

Арифметика

1. Каково наибольшее отношение трёхзначного числа к сумме его цифр?

2. Найдите сумму: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}$.

3. Известно, что уравнение $ax^5+bx^4+c=0$ имеет три разных корня. Докажите, что уравнение $cx^5+bx+a=0$ также имеет три разных корня.

4. Суммы коэффициентов многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны 2 и 3 соответственно. Найдите сумму коэффициентов многочлена $P(x)Q(x)$.

5. Докажите, что если $x+y=z+t$, $x^2+y^2=z^2+t^2$, то $x^{100}+y^{100}=z^{100}+t^{100}$.

Геометрия

6. Дан угол с вершиной O. На одной его стороне отложены равные отрезки $OA=AB=BC$, а на другой стороне — равные отрезки $OD=DE=EF$. Докажите, что треугольники AEC и DBF равновелики.

7. Вписать в квадрат правильный треугольник наибольшей площади.

8. Найдите на данной прямой точку, из которой данный отрезок виден под наибольшим углом.

9. Каково максимальное число острых углов в выпуклом многоугольнике?

10. Докажите, что четыре круга, построенные на сторонах выпуклого четырёхугольника, как на диаметрах, полностью его покрывают.

Комбинаторика?

11. Числа $a, b \leqslant n$ дают одинаковые остатки при делении на все простые числа, меньшие n. Докажите, что $a=b$.

12. На столе лежат 100 спичек. Двое ходят по очереди. За ход можно взять 1, 2, 4, ... (любую степень двойки) спичек. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или его партнер?

13. На бесконечном листе в клетку рисуют круги и считают, сколько узлов сетки в него попало. Для каждого ли натурального числа n существует круг, содержащий ровно n узлов?

14. Можно ли все натуральные числа раскрасить в два цвета так, чтобы не было бесконечной арифметической прогрессии одного цвета?

15. Круг радиуса 1 покрыт семью одинаковыми кругами. Докажите, что их радиус $\geqslant 1/2$.

Источник : «Как решают нестандартные задачи», А.Я. Канель-Белов, А.К. Ковальджи