

Министерство образования, науки
и технологического развития
Сербское математическое общество

8 СЕРБСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ОЛИМПИАДА
УЧАЩИХСЯ СРЕДНИХ ШКОЛ

5 апреля 2014

День первый

1. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такие что для всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено

$$f(xf(y) - yf(x)) = f(xy) - xy.$$

2. На сторонах BC и AC треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно. Пусть F ($F \neq C$) — точка пересечения окружности, описанной около треугольника CED , и прямой, проходящей через точку C параллельно прямой AB . Пусть G — точка пересечения прямой FD и стороны AB , а H — точка на прямой AB , такая что $\angle HDA = \angle GEB$ и точка A расположена между точками H и B . Известно, что $DG = EH$. Докажите, что точка пересечения отрезков AD и BE лежит на биссектрисе угла ACB .
3. Два игрока играют в следующую игру. Игроки по очереди записывают по одному натуральному числу, большему 1, причем запрещается записывать число, представимое в виде линейной комбинации ранее записанных чисел с целыми неотрицательными коэффициентами. Проигрывает игрок, который не может записать новое число. Есть ли у какого-либо из игроков выигрышная стратегия, и если да, то у кого?

Продолжительность тура 270 минут.

Решения задач следует подробно аргументировать.

Каждая задача стоит 7 баллов.