Подсчеты

Ключевые понятия: *правило произведения, правило суммы, формула включения-исключения, принцип Дирихле.*

1.$^\circ$ Сколько существует способов выбрать k элементов из n?

2.$^\circ$ Пусть известно разложение n на простые множители: $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n? Ответ: $\varphi(n) = n(1-1/p_1)(1-1/p_2)\dots(1-1/p_k)$

3.$^\circ$ Сколько натуральных чисел от 1 до 1000 делится на 3 либо на 5 либо на 7?

4.$^\circ$ В квадрате со стороной 1 даны 5 множеств площади 0,5 каждое. Докажите, что найдутся два из них, пересекающиеся по площади не менее 0,15.

Задачи для самостоятельного решения

5. На столе прямоугольной формы лежат 15 журналов, которые закрывают его полностью. Докажите, что можно убрать 7 журналов таким образом, что оставшиеся 8 закроют по меньшей мере 8/15 поверхности стола.

6. Каждая сторона в треугольнике ABC разделена на 8 равных отрезков. Сколько существует различных треугольников с вершинами в точках деления (точки A, B, C, не могут быть вершинами треугольников), у которых ни одна сторона не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC?

7. Натуральные числа от 1 до 10 записали в строчку в произвольном порядке и каждое из них сложили с номером места, на котором оно стоит (номер места — натуральное число от 1 до 10). Докажите, что хотя бы у двух сумм цифры единиц совпадают.

8. На каждой из сторон квадрата отмечены по n точек. Точки, лежащие на разных сторонах, попарно соединены отрезками. Обозначим через $P(n)$ наибольшее возможное число пересечений данных отрезков. Известно, что $P(n)$ — многочлен от n. Найдите его степень и коэффициенты.

Процессы

Ключевые понятия: *инварианты, полуинварианты, принцип крайнего, непрерывность.*

1.$^\circ$ В семи вершинах кубика стоят $+1$, а в восьмой вершине стоит -1. Разрешается прибавлять по 1 к концам любого ребра куба. Можно ли добиться того, чтобы после нескольких таких операций все числа в вершинах куба делились на 3?

2.$^\circ$ На плоскости лежат три шайбы. Хоккеист бьет по одной из них так, чтобы она прошла между двумя другими и остановилась в некоторой точке. Можно ли все шайбы вернуть на свои места после 1001 ударов?

3.$^\circ$ В клетках таблицы $m \times n$ вписаны некоторые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел одного столбца или одной строки. Докажите, что несколькими такими операциями можно добиться того, чтобы суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце были неотрицательными.

4.$^\circ$ Докажите, что найдется 1000 подряд идущих натуральных чисел, среди которых ровно 10 простых.

Задачи для самостоятельного решения

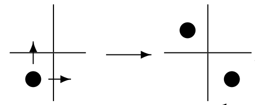
5. В стране Серобуромалинии живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно приобретают окраску третьего цвета (например, серый и бурый становятся малиновыми). По трое хамелеоны не встречаются. Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?

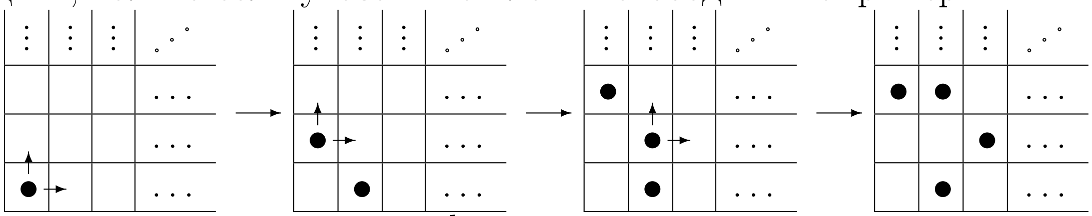
6. По кругу написано несколько чисел. Если для некоторых идущих подряд чисел a, b, c, d оказывается, что $(a-d)(b-c) < 0$, то числа b и c можно поменять местами. Докажите, что такую операцию можно проделать лишь конечное число раз.

7. Хоккейный матч Динамо–Спартак закончился со счетом 8:5 в пользу Динамо. Верно ли, что в ходе матча был момент, когда команда Динамо уже забросила столько шайб, сколько еще оставалось забросить Спартаку до конца матча?

8. В каждой клетке прямоугольного листа клетчатой бумаги записано натуральное число. Две клетки называются соседними, если они имеют общую сторону. Ежесекундно число в каждой клетке заменяется на наибольший общий делитель чисел, содержащихся в соседних клетках. Все числа при этом заменяются одновременно. Известно, что, начиная с некоторого момента времени, количество различных чисел, записанных на листе, равно n (с увеличением времени n не меняется). Найдите все возможные значения n.

Оценка + пример

1.° В углу бесконечной вправо и вверх доски стоит фишка. За один ход разрешается убрать любую фишку и вместо нее поставить две, расположенные в соседних клетках вверх и вправо от нее: . Данное действие разрешается производить, только если указанные клетки свободны. Например:



Какое наименьшее количество фишек может остаться в угловом квадрате со стороной 3?

2.° Какое наибольшее число острых внутренних углов может быть в плоском несамопересекающемся n-угольнике?

3.° Найдите наибольшее возможное значение наименьших возможных значений квадратных трехчленов $x^2 + ax + 1$.

Для самостоятельного решения

4. Есть два больших сосуда. В одном из них — 1л спирта, а в другом — 1л воды. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой. Какую наибольшую концентрацию спирта можно получить в том сосуде, где была вода?

5. В ожесточенном бою более 70 из 100 пиратов потеряли один глаз, более 75 –одно ухо, более 80 – одну руку и более 85 – одну ногу. Каково наименьшее количество пиратов, потерявших одновременно глаз, ухо, руку и ногу?

6. На прямой через равные промежутки отмечены 2014 точек. Петя раскрашивает половину из них в красный цвет, а остальные — в синий. Затем Вася разбивает их на пары “красная”—“синяя” так, чтобы сумма расстояний между точками в парах была максимальной. Докажите, что этот максимум не зависит от того, какую раскраску сделал Петя.

7. Найдите

$$\min_{a>0}\left(\max_{b\in\mathbb{R}}\left(\sin(a^b)\right)\right).$$