Критерий Карно

1.$^\circ$ Докажите, что: $CD \perp AB \Leftrightarrow AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$.

2.$^\circ$ Дано число $d \in \mathbb{R}$. Сколько существует точек X на прямой AB, таких что $AX^2 - BX^2 = d$?

Критерий Карно. Даны треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Пусть ℓ_a – перпендикуляр из A_1 на B_2C_2; аналогично определяются ℓ_b и ℓ_c. Тогда

$$\ell_a \cap \ell_b \cap \ell_c \neq \emptyset$$
$$\Updownarrow$$
$$A_1B_2^2 - A_1C_2^2 + B_1C_2^2 - B_1A_2^2 + C_1A_2^2 - C_1B_2^2 = 0.$$

3.$^\circ$ Докажите, что высоты любого треугольника пересекаются в одной точке.

4.$^\circ$ Три окружности попарно пересекаются. Докажите, что общие хорды (или их продолжения) пар этих окружностей пересекаются в одной точке.

Задачи для самостоятельного решения

5. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вневписанных окружностей на соответственные стороны треугольника, пересекаются в одной точке.

6. Дан треугольник ΔABC и прямая ℓ, не проходящая через вершины ΔABC. Пусть A', B', C' — основания перпендикуляров на ℓ из A, B, C, соответственно. Пусть a', b', c' — перпендикуляры из A' на BC, из B' на AC, из C' на AB. Докажите, что прямые a', b', c' пересекаются в одной точке.

7. Дан правильный треугольник ABC и произвольная точка D. Точки P, Q и R — центры окружностей, вписанных в треугольники BCD, CAD и ABD соответственно. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из вершин A, B и C на прямые соответственно QR, RP и PQ, пересекаются в одной точке.

8. Докажите, что если перпендикуляры, восставленные из оснований биссектрис треугольника, пересекаются в одной точке, то треугольник равнобедренный.

Вокруг формулы Штейнера-Стюарта

1.$^\circ$ Длина медианы $m_c = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}}$.

В частности, ГМТ X, таких что $AX^2 + BX^2 = \text{const}$, — окружность с центром в середине AB (либо пустое множество).

2.$^\circ$ **Формула Стюарта.** На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D. Обозначим $AB = c, BC = a, CA = b$, $AD = x$, $BD = p$, $DC = q$. Докажите, что $x^2 = \dfrac{p}{a} \cdot b^2 + \dfrac{q}{a} \cdot c^2 - pq$.

3.$^\circ$ **Формула Штейнера.** Момент инерции I тела массы m относительно оси, расположенной на расстоянии d от центра масс этого тела, равен $I = I_0 + md^2$, где I_0 — момент инерции этого же тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела.

Замечание. Формула Стюарта является частным случаем формулы Штейнера.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — точки плоскости, возможно совпадающие; $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — действительные числа. Рассмотрим ГМТ X:

$$k_1A_1X^2 + k_2A_2X^2 + \ldots + k_nA_nX^2 = \text{const}.$$

(i) Если $\sum_{i=1}^n k_i = 0$, то это либо вся плоскость, либо прямая, либо пустое множество;

(ii) Если $\sum_{i=1}^n k_i \neq 0$, то это либо окружность, либо точка, либо пустое множество.

4.$^\circ$ Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ касаются ω_5 внешним образом; при этом ω_1 и ω_3 касаются ω_2 и ω_4 также внешним образом. Докажите, что точка пересечения общих внутренних касательных $\ell_{\omega_2\omega_5}$ и $\ell_{\omega_4\omega_5}$ лежит на прямой центров ω_1 и ω_3.

Задачи для самостоятельного решения

5. Биссектриса угла между сторонами a и b делит противоположную сторону треугольника на части длин p и q. Докажите, что ее длина $l = \sqrt{ab - pq}$.

6. Окружность Аполлония. Докажите, что ГМТ X: $AX : BX = k$ — окружность ($k \neq 1$) либо прямая ($k = 1$).

7. Назовем *квазилинейной* функцию, которая, ограниченная на любую прямую, становится линейной. Докажите, что если на плоскости введены декартовы координаты, то квазилинейные функции — это в точности функции вида $f(x, y) = ax + by + c$.

8. $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что величина $AX^2 - BX^2 + CX^2 - DX^2$ не зависит от выбора точки X.

Сумма расстояний

Определим *ориентированное расстояние* $\mathrm{d}_\ell(X)$ от точки X до прямой ℓ как обычное расстояние, взятое со знаком $+$ или $-$ в зависимости от того, в какой из полуплоскостей с границей ℓ лежит X.

1.$^\circ$ Пусть ℓ_1 и ℓ_2 — пересекающиеся прямые на плоскости, а μ_1, μ_2 — произвольные числа. Тогда найдётся прямая ℓ, такая что

$$\mu_1\mathrm{d}_{\ell_1}(x) + \mu_2\mathrm{d}_{\ell_2}(X) = \mathrm{d}_\ell(X) + \mathrm{const}.$$

2.$^\circ$ Пусть ℓ_1 и ℓ_2 — параллельные прямые на плоскости, а μ_1, μ_2 — произвольные числа. Тогда

- **(i)** если $\mu_1 + \mu_2 \neq 0$, то найдётся прямая ℓ, параллельная ℓ_1 и ℓ_2 и, что главное, такая что $\mu_1\mathrm{d}_{\ell_1}(x) + \mu_2\mathrm{d}_{\ell_2}(X) = (\mu_1 + \mu_2)\mathrm{d}_\ell(X)$;
- **(ii)** если $\mu_1 + \mu_2 = 0$, то $\mu_1\mathrm{d}_{\ell_1}(x) + \mu_2\mathrm{d}_{\ell_2}(X) = \mathrm{const}$.

Даны прямые a_1, a_2, ..., a_n. Геометрическое место точек X, таких что

$$\lambda_1\mathrm{d}_{a_1}(X) + \lambda_2\mathrm{d}_{a_2}(X) + \ldots + \lambda_n\mathrm{d}_{a_n}(X) = \mathrm{const},$$

является либо прямой, либо пустым множеством, либо всей плоскостью.

Задачи для самостоятельного решения

3. Пусть AA' и BB' — биссектрисы треугольника ABC. Докажите, что для любой точки X с отрезка $A'B'$ справедливо $a + b = c$, где a, b, c — расстояния от точки X до соответствующих сторон треугольника.

4. Докажите, что основания внешних биссектрис лежат на одной прямой.

5. Теорема Ньютона. В описанном четырехугольнике центр вписанной окружности лежит на отрезке, соединяющем середины диагоналей.

6. Теорема Гаусса. В произвольном четырехугольнике прямая, содержащая середины диагоналей, проходит через середину отрезка, соединящего точки пересечения противоположных сторон.

7. Найдите геометрическое место точек плоскости X, таких что $S_{ACX} = S_{BCX}$, где ABC — данный треугольник. (Под S_{PQR} подразумевается неориентированная площадь треугольника PQR.)