Нелинейные диофантовы уравнения

1. Пифагоровы тройки. Решите уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ в $\mathbb{Z}$.

Ключ: Любая пифагорова тройка имеет (при некоторых натуральных λ, a, b) вид $x = \lambda(a^2 - b^2)$, $y = \lambda(2ab)$, $z = \lambda(a^2 + b^2)$.

2. Суммы квадратов. При каких n уравнение $x^2 + y^2 = n$ разрешимо в $\mathbb{Z}$?

Ключ: Важны простые делители n, дающие остаток 3 при делении на 4.

3. Уравнения Пелля. Для каждого $a \in \mathbb{N}$ решите $x^2 - ay^2 = 1$ в $\mathbb{Z}$.

Ключ: Бесконечно много решений при любом $a \in \mathbb{N}$, $a \neq d^2$.

4. Уравнение Каталана. Найдите целые $a, b, m, n > 1$, такие что $a^n - b^m = 1$.

Ключ: Единственное решение: $3^2 - 2^3 = 1$.

5. Метод спуска. Решите в $\mathbb{Z}$ уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

Ключ: Только $x = y = z = 0$.

6. Метод остатков. Решите в $\mathbb{Z}$ уравнение $12x + 5 = y^2$.

Ключ: Рассмотрение по модулю 3 показывает, что решений нет.

7. Комбинированный метод. Решите в $\mathbb{Z}$ уравнение $2^x = 3^y + 1$.

Ключ: x должно быть четным из-за модуля 3; далее разность квадратов.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите все решения:

8. $x^2 + y^2 = 2014$ в $\mathbb{Z}$.

9. $a^2 - 3b^2 = 8$ в $\mathbb{Z}$.

10. $15x^2 - 7y^2 = 9$ в $\mathbb{Z}$.

11. $-x^2 + 7y^3 + 6 = 0$ в $\mathbb{Z}$.

12. $2^x + 1 = 3^y$ в $\mathbb{Z}$.

13. $1! + 2! + \ldots + n! = m^2$ в $\mathbb{N}$.

14. $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$ в $\mathbb{Z}$.

15. $3^n = x^2 + y^2$ в $\mathbb{Z}$.

16. $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2xyzu$ в $\mathbb{Z}$.

17. $x^3 - 1 = 2^y$ в $\mathbb{Z}$.

18. Решите $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$ в $\mathbb{N}$ и отдельно в $\mathbb{Z}$.

19. Сколько троек целых чисел x, y, z удовлетворяет уравнению

$$xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x) = 6\ ?$$

20. Докажите, что для того, чтобы уравнение $1/x - 1/y = 1/n$, где n — натуральное число, имело единственное решение в натуральных числах относительно x и y, необходимо и достаточно, чтобы n было простым числом.

21. Докажите, что последовательность $a_n = 1 + 17n^2$ $(n \in \mathbb{N})$ содержит бесконечно много квадратов целых чисел.

22. Рассмотрим уравнение $2x^2 + x = 3y^2 + y$. Докажите, что $x - y$ и $2x + 2y + 1$ — точные квадраты. Докажите, что это уравнение имеет бесконечно много решений.

Линейные диофантовы уравнения

1. У кассира есть только 72-рублевые купюры, а у Вас — только 105-рублевые (у обоих в неограниченном количестве). Сможете ли Вы уплатить кассиру один рубль? А три рубля?

2. Рассмотрим уравнение $89x + 55y = 1$. Найдите решение, при котором...

(а) ... $|x + y| \to \min$. **(б)** ... $|x| + |y| \to \min$. **(в)** ... $x^2 + y^2 \to \min$.

Линейное представление НОД:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} - \{0\} \quad \exists x, y, \in \mathbb{Z} \qquad ax + by = \text{НОД}(a, b)$$

3. Докажите, что уравнение $ax + by = c$ имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение уравнение $ax + by = c - 2a - 3b$.

4. При каких $a, b \in \mathbb{Z}$ система

$$\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ bx + 3y = 1 \end{cases}$$

имеет целочисленное решение $x, y \in \mathbb{Z}$?

5. Решите диофантово уравнение $2x + 3y + 5z = 11$.

6. Докажите, что если $(a, b, c) = 1$, то уравнение

$$ax + by + cz = 1$$

разрешимо в целых числах x, y, z.

7. Пусть a, b, c — такие целые неотрицательные числа, что

$$28a + 30b + 31c = 365.$$

Докажите, что

$$a + b + c = 12.$$

8. Теорема Сильвестра. Докажите, что наибольшее c, для которого уравнение $ax + by = c$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, имеет вид $c = ab - a - b$.