

# Треугольники

1.° В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BH$ . Известно, что  $AB = 16$ ,  $BC = 12$ . Окружность с центром, лежащем на высоте  $BH$ , содержит вершины треугольника  $B, C$  и пересекает сторону  $AB$  в точке  $E$ . Найдите длину отрезка  $AE$ .

**Ключ:** Произведения длин секущих равны между собой.

2.° В треугольнике  $ABC$  медиана  $CD$  и биссектриса  $AE$  перпендикулярны. Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что точки  $A, C, D$  и  $E$  лежат на одной окружности.

**Ключ:** Одна из диагоналей вписанного дельтоида — диаметр описанной окружности.

3.° Биссектрисы  $AM$  и  $BL$  разностороннего треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $I$ . Найдите угол  $C$ , если известно, что  $MI = IL$ .

**Ключ:** Биссектриса пересекает описанную окружность треугольника в точке, равноудаленной от двух ближайших вершин.

4.° Пусть  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ , причем  $CH = AB = 1$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $AHC$ .

**Ключ:** В любом треугольнике  $CH = AB \cdot |\operatorname{ctg} \gamma|$ .

---

## Задачи для самостоятельного решения

5. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  высота  $CH$  и медиана  $CM$  делят прямой угол  $C$  на три равные части. Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если площадь треугольника  $CHM$  равна  $S$ .

6. Отрезок  $AE$  разбивает треугольник  $ABC$  на два подобных треугольника, причем коэффициент подобия равен  $1/\sqrt{3}$ . Известно, что длина отрезка  $AE$  равна 1. Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

7. Середины сторон неравнобедренного треугольника  $ABC$  лежат на окружности, центр которой принадлежит биссектрисе угла  $C$ . Найдите сторону  $AB$ , если  $BC = a$ ,  $AC = b$ .

8. Найдите радиус окружности, касающейся катетов прямоугольного треугольника  $ABC$  и описанной около  $ABC$  окружности, если радиус вписанной в треугольник  $ABC$  окружности равен  $r$ .

# Четырехугольники

1.° Через точку пересечения диагоналей трапеции с основаниями  $a$  и  $b$  проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, соединяющего боковые стороны трапеции.

**Ключ:** Где трапеция — там и подобие.

2.° Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  — середины сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  соответственно. Докажите, что  $\angle BMN = \angle CKN$ .

**Ключ:** Середина отрезка — всегда вершина какой-нибудь средней линии.

3.° Найдите длину диагонали прямоугольника площади  $1/2$ , вписанного в квадрат со стороной 1 так, что на каждой стороне квадрата лежит в точности одна вершина прямоугольника.

**Ключ:** Прямоугольник можно вписать в квадрат двумя картинками.

4.° Дана трапеция  $ABCD$ ,  $BC \parallel AD$ . Биссектрисы углов  $A$  и  $B$  пересекаются в точке  $P$ , биссектрисы углов  $C$  и  $D$  — в точке  $Q$ . Найдите  $PQ$ , если  $AB = 4$ ,  $BC = 5$ ,  $CD = 3$ ,  $AD = 8$ .

**Ключ:** Биссектрисы боковых углов трапеции пересекаются на средней линии.

---

## Задачи для самостоятельного решения

5. На плоскости даны четыре точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  такие, что  $AB = 1$ ,  $BC = 2$ ,  $\angle ABC = \pi/3$ ,  $CD = \sqrt{3}$ ,  $\angle BCD = \pi/2$ . Найдите  $AD$ .

6. Вершины квадратов  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D$ , имеющих общую вершину  $D$ , представлены по часовой стрелке. Прямая  $l$ , проходящая через точку  $D$ , перпендикулярна прямой  $A_1C$ . Докажите, что она делит отрезок  $AC_1$  пополам.

7. Угол между диагоналями трапеции равен  $120^\circ$ , одна из ее диагоналей равна 4, а высота равна 2. Найдите длину второй диагонали.

8. В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD = a$ ,  $BC = b$  ( $a > b$ ) провели отрезок  $MN$ , параллельный основаниям и делящий площадь трапеции пополам. Найдите длину этого отрезка.

# Окружности

1.° Постройте три окружности с центрами в заданных трех точках, попарно касающиеся друг друга.

**Ключ:** Точки касания этих окружностей между собой суть точки касания вписанной окружности треугольника центров с его сторонами.

2.° Из данной точки вне данной окружности опустите одной линейкой перпендикуляр на ее фиксированный диаметр.

**Ключ:** Высоты треугольника пересекаются в одной точке.

3.° Найдите радиус окружности, касающейся катетов прямоугольного треугольника  $ABC$  и описанной около  $ABC$  окружности, если радиус вписанной в треугольник  $ABC$  окружности равен  $r$ .

**Ключ:** Иногда нужно составить уравнение.

---

## Задачи для самостоятельного решения

4. Окружность высекает на всех четырех сторонах четырехугольника равные хорды. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

5. На дуге  $AB$  окружности с центром в точке  $O$  выбрана точка  $M$ . Величина угла  $AOB$  равна  $60^\circ$ . Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника  $AMBO$ , перпендикулярны.

6. На отрезке между центрами двух касающихся внешним образом окружностей как на диаметре построена третья окружность. Докажите, что все три окружности касаются одной прямой.

7. Даны две окружности одинакового радиуса. Они пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $A$  проведена их общая секущая, пересекающая окружности в точках  $C$  и  $D$ . Через точку  $B$  проведена прямая, перпендикулярная  $CD$  и пересекающая окружности еще в точках  $E$  и  $H$ . Докажите, что  $CH = ED$  и  $HC = HD$ .