

Треугольники

1.° В треугольнике ABC проведена высота BH . Известно, что $AB = 16$, $BC = 12$. Окружность с центром, лежащем на высоте BH , содержит вершины треугольника B, C и пересекает сторону AB в точке E . Найдите длину отрезка AE .

Ключ: Произведения длин секущих равны между собой.

2.° В треугольнике ABC медиана CD и биссектриса AE перпендикулярны. Найдите углы треугольника ABC , если известно, что точки A, C, D и E лежат на одной окружности.

Ключ: Одна из диагоналей вписанного дельтоида — диаметр описанной окружности.

3.° Биссектрисы AM и BL разностороннего треугольника ABC пересекаются в точке I . Найдите угол C , если известно, что $MI = IL$.

Ключ: Биссектриса пересекает описанную окружность треугольника в точке, равноудаленной от двух ближайших вершин.

4.° Пусть H — ортоцентр треугольника ABC , причем $CH = AB = 1$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AHC .

Ключ: В любом треугольнике $CH = AB \cdot |\operatorname{ctg} \gamma|$.

Задачи для самостоятельного решения

5. В прямоугольном треугольнике ABC высота CH и медиана CM делят прямой угол C на три равные части. Найдите площадь треугольника ABC , если площадь треугольника CHM равна S .

6. Отрезок AE разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника, причем коэффициент подобия равен $1/\sqrt{3}$. Известно, что длина отрезка AE равна 1. Найдите площадь треугольника ABC .

7. Середины сторон неравнобедренного треугольника ABC лежат на окружности, центр которой принадлежит биссектрисе угла C . Найдите сторону AB , если $BC = a$, $AC = b$.

8. Найдите радиус окружности, касающейся катетов прямоугольного треугольника ABC и описанной около ABC окружности, если радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен r .

Четырехугольники

1.° Через точку пересечения диагоналей трапеции с основаниями a и b проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, соединяющего боковые стороны трапеции.

Ключ: Где трапеция — там и подобие.

2.° Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Точки M , N и K — середины сторон AB , BC и CD соответственно. Докажите, что $\angle BMN = \angle CKN$.

Ключ: Середина отрезка — всегда вершина какой-нибудь средней линии.

3.° Найдите длину диагонали прямоугольника площади $1/2$, вписанного в квадрат со стороной 1 так, что на каждой стороне квадрата лежит в точности одна вершина прямоугольника.

Ключ: Прямоугольник можно вписать в квадрат двумя картинками.

4.° Дана трапеция $ABCD$, $BC \parallel AD$. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке P , биссектрисы углов C и D — в точке Q . Найдите PQ , если $AB = 4$, $BC = 5$, $CD = 3$, $AD = 8$.

Ключ: Биссектрисы боковых углов трапеции пересекаются на средней линии.

Задачи для самостоятельного решения

5. На плоскости даны четыре точки A , B , C , D такие, что $AB = 1$, $BC = 2$, $\angle ABC = \pi/3$, $CD = \sqrt{3}$, $\angle BCD = \pi/2$. Найдите AD .

6. Вершины квадратов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D$, имеющих общую вершину D , поставлены по часовой стрелке. Прямая l , проходящая через точку D , перпендикулярна прямой A_1C . Докажите, что она делит отрезок AC_1 пополам.

7. Угол между диагоналями трапеции равен 120° , одна из ее диагоналей равна 4, а высота равна 2. Найдите длину второй диагонали.

8. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = a$, $BC = b$ ($a > b$) провели отрезок MN , параллельный основаниям и делящий площадь трапеции пополам. Найдите длину этого отрезка.

Окружности

1.° Постройте три окружности с центрами в заданных трех точках, попарно касающиеся друг друга.

Ключ: Точки касания этих окружностей между собой суть точки касания вписанной окружности треугольника центров с его сторонами.

2.° Из данной точки вне данной окружности опустите одной линейкой перпендикуляр на ее фиксированный диаметр.

Ключ: Высоты треугольника пересекаются в одной точке.

3.° Найдите радиус окружности, касающейся катетов прямоугольного треугольника ABC и описанной около ABC окружности, если радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен r .

Ключ: Иногда нужно составить уравнение.

Задачи для самостоятельного решения

4. Окружность высекает на всех четырех сторонах четырехугольника равные хорды. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

5. На дуге AB окружности с центром в точке O выбрана точка M . Величина угла AOB равна 60° . Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника $AMBO$, перпендикулярны.

6. На отрезке между центрами двух касающихся внешним образом окружностей как на диаметре построена третья окружность. Докажите, что все три окружности касаются одной прямой.

7. Даны две окружности одинакового радиуса. Они пересекаются в точках A и B . Через точку A проведена их общая секущая, пересекающая окружности в точках C и D . Через точку B проведена прямая, перпендикулярная CD и пересекающая окружности еще в точках E и H . Докажите, что $CH = ED$ и $HC = HD$.