

Многоборье-2013

Регата

Младшая лига

Первый тур

1. Имеется куча из нескольких конфет. Сначала Малыш съедает из этой кучи одну конфету, затем Карлсон съедает из этой кучи две конфеты, затем Малыш — три, Карлсон — четыре и так далее. Если в какой-то момент число оставшихся конфет меньше, чем должен съесть Малыш или Карлсон очередным ходом, то он доедает все конфеты. Оказалось, что Малыш съел 101 конфету. Сколько всего конфет было изначально?

(А. Шаповалов)

2. Точки M , N , P — середины сторон AB , CD и DA вписанного четырехугольника $ABCD$. Известно, что $\angle MPD = 150^\circ$, $\angle BCD = 140^\circ$. Найдите угол $\angle PND$.

(Д. Максимов)

3. Трём братьям надо перевезти с одной квартиры на другую рояль весом 250 кг, диван весом 100 кг и более 100 коробок по 50 кг. Был нанят небольшой фургон с шофером на 5 рейсов туда (и 4 обратно), который может за раз перевезти 500 кг груза и одного пассажира. Погрузить или выгрузить диван братья могут вдвоём, рояль — втроём, с коробками любой из братьев справляется в одиночку. Надо перевезти всю мебель и как можно больше коробок. Какое наибольшее число коробок удастся перевезти? (Шофер не грузит, другого транспорта и помощников нет, пассажиров вместо груза везти нельзя).

(А. Шаповалов, Д. Шаповалов)

Второй тур

4. По кругу стоят 2013 натуральных чисел. Оказалось, что в любой паре соседних чисел одно из них делится на другое. Докажите, что найдутся два несоседних числа, одно из которых тоже делится на другое.

(А. Шаповалов)

5. На плоскости даны 2013 отрезков единичной длины, каждый пересекается с каждым. Докажите, что все их можно накрыть кругом радиуса 1.5.

(А. Шаповалов)

6. Фабрика выпускает наборы из $n > 2$ слоников различной величины. По стандарту разница масс соседних слоников внутри каждого набора должна быть

одной и той же. Контролер проверяет наборы по одному с помощью чашечных весов без гирь. При каком наименьшем n это возможно?

(А. Шаповалов)

Третий тур

7. Вася выписал на доску числа от 1 до 20132013. На сколько больше он написал единиц, чем троек?

(фольклор, предложил Д. Максимов)

8. В неравнобедренную трапецию $ABCD$ вписана окружность с центром O . Точка M — середина более длинного основания AB . Прямая MO пересекает отрезок CD в точке F . E — точка касания CD и окружности. Докажите, что $DE = CF$ тогда и только тогда, когда $AB = 2CD$.

(Polish NO 1993)

9. Шахматная доска покрыта 32 домино (каждое домино покрывает ровно два поля). Докажите, что эти домино можно повернуть на 90 или на 180 градусов (каждое — вокруг центра одной из закрываемых им клеток, поворачивать можно независимо друг от друга и в любую сторону), чтобы по-прежнему вся доска была покрыта.

(А. Шаповалов)

Четвертый тур

10. В клетках квадрата 100×100 вписаны натуральные числа так, что все 200 сумм в рядах (строках и столбцах) различны. Какова наименьшая возможная сумма всех чисел в таблице?

(Д. Максимов)

11. В параллелограмме $ABCD$ выполнено $BD = BC$. Точка M на AC такова, что $3AM = AC$. Докажите, что $AM = BM$.

(13-й Уральский турнир, высшая лига)

12. На нижней ступеньке лестницы из 350 ступенек лежит 350 камней, остальные ступеньки пусты. За одну ходку Сизиф может взять с любой ступеньки группу из одного или нескольких камней (не обязательно всех, лежащих на этой ступеньке), и переложить всю группу вверх или вниз на число ступенек, равное числу камней в группе (группу из одного камня на соседнюю ступеньку, группу из двух камней — через одну ступеньку вверх или вниз и т. д.). Помогите Сизифу переложить все камни на соседнюю ступеньку, сделав не более 21 ходки.

(А. Шаповалов)

Старшая лига

Первый тур

13. Назовем натуральное число *интересным*, если оно — степень тройки или представимо в виде суммы различных степеней тройки. Интересные числа занумеровали по возрастанию. Найдите сотое число.

(фольклор)

14. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AC выбрали точки M и N (M между A и N). Оказалось, что $\angle MBN = 45^\circ$. Докажите, что из отрезков AM , MN и NC можно сложить прямоугольный треугольник.

(фольклор)

15. Вершины замкнутой несамопересекающейся восьмизвенной ломаной совпадают с вершинами куба. Докажите, что у этой ломаной найдутся четыре звена одинаковой длины.

(А. Шаповалов)

Второй тур

16. Для скольких натуральных N от 1 до 2013 уравнение $x^{[x]} = N$ имеет решение в положительных вещественных x ? ($[x]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее x .)

(фольклор)

17. Пусть Q — точка внутри выпуклого многогранника M . Прямая ℓ , проходящая через Q , пересекает поверхность многогранника в точках A и B . Докажите, что для бесконечного множества направлений прямой ℓ верно, что $AQ = BQ$.

(Putnam 1977 B4 Problem)

18. На доске $4n \times 4n$ расставляют $4n^2$ королей так, чтобы они не били друг друга. Докажите, что число таких расстановок не больше, чем 12^{2n^2} .

(А. Шаповалов)

Третий тур

19. У квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ коэффициент $a \neq 0$. Докажите, что при некотором иррациональном x значение $ax^2 + bx + c$ — рационально.

(С. Козаловский, А. Шаповалов)

20. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ на сторонах AB , BC , CD и DA лежат точки K , L , M и N соответственно, такие что $AK = KB = 6$, $BL = 3$, $LC = 12$, $CM = 4$, $MD = 9$, $DN = 18$, $NA = 2$. Докажите, что четырехугольник $KLMN$ вписанный.

(Ф. Бахарев)

21. Назовем *ценной цифрой* числа любую из цифр, встречающихся в его десятичной записи не большее число раз, чем каждая из остальных цифр (это может быть и цифра, не встречающаяся в записи n). Петя составляет бесконечную последовательность цифр: на n -е место он ставит любую из ценных цифр числа n . Может ли Петя получить последовательность, периодическую с некоторого места?

(А. Шаповалов)

Четвертый тур

22. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник. Все ребра этой призмы имеют натуральные длины, а площади некоторых двух её граней равны 13 и 30. Найдите стороны основания этой призмы.

(KöMaL journal)

23. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность Γ . Биссектриса угла A пересекает отрезок BC в точке E . Пусть M — середина дуги BAC . Прямая ME повторно пересекает Γ в точке D . Докажите, что центр описанной окружности треугольника AED совпадает с точкой пересечения касательной к Γ в точке D и прямой BC .

(Italy TST 2002)

24. На доске выписано $2n^2 + 5n$ натуральных чисел, не обязательно различных. Каждое число равно количеству выписанных чисел, не равных ему. Каково наибольшее количество различных чисел среди выписанных?

(А. Шаповалов)

Алгебра и теория чисел

Младшая лига

25. Найдите все такие натуральные n и k , что $1! + 3! + \dots + (2n - 1)! = k^2$.

(KöMaL journal)

26. Положительные числа a , b и c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$. Докажите неравенство

$$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} + b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)} + c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \geq 2\sqrt{abc}.$$

(Cruz Mathematicorum)

27. Найдите все такие натуральные a и b , что $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ является корнем уравнения $x^2 + ax - b = 0$.

(Д. Максимов)

28. Найдите все функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такие, что $f(f(n)) + f(n) = 2n + 6$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

(Д. Максимов)

Старшая лига

29. В клетках квадрата 100×100 вписаны натуральные числа так, что все 200 сумм в рядах (строках и столбцах) различны. Какова наименьшая возможная сумма всех чисел в таблице?

(Д. Максимов)

30. Пусть возрастающая функция $f: (0; \infty) \rightarrow (0; \infty)$ для любого $x > 0$ удовлетворяет неравенству $f(2x) \leq 4f(x+1)$. Докажите, что для любого $x > 1$ выполнено

$$f(x) \leq f(4)x^2.$$

(В. Быковский)

31. Пусть

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2,$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + y_4^3.$$

Докажите, что

$$(x_1 - y_2)(x_1 - y_3)(x_1 - y_4) = (y_1 - x_2)(y_1 - x_3)(y_1 - x_4).$$

(А. Устинов)

32. Найдется ли последовательность из 1000000 натуральных чисел, взаимно простых с 10, в которой каждое следующее делится на предыдущее, но имеет меньшую сумму цифр?

(А. Шаповалов)

Комбинаторика и логика

Младшая лига

33. В школьной олимпиаде по математике участвовало 60 человек, по физике — 50, по информатике — 40. Составили три списка: тех, кто участвовал ровно в одной из олимпиад, ровно в двух, ровно в трех. Во всех списках одно и то же число людей. Сколько человек в каждом списке?

(А. Шаповалов)

34. Центр правильного 55-угольника соединили отрезками со всеми его вершинами. Вместе со сторонами 55-угольника получилось 110 отрезков. Петя и Вася по очереди красят эти отрезки, по одному за ход. Можно красить отрезок, только если он и выходящие из его концов отрезки не окрашены. Кто не может сделать ход — проигрывает. Начинает Петя. Кто из них может выигрывать, как бы ни играл соперник?

(А. Шаповалов)

35. На клетчатой доске 100×100 стоят 77 коней, 33 ладьи и ферзь. Известно, что каждая фигура бьет ровно одну другую и побита ровно одной другой. Докажите, что ферзь бьет свою фигуру по диагонали.

(А. Шаповалов)

36. 33 компьютера попарно соединены проводами. Каждый провод покрашен в один из 32 цветов. Назовем компьютер *радужным*, если из него выходят провода всех цветов. Какое наибольшее число компьютеров могут быть радужными?

(Iran NO 2012)

37. По кругу стоят несколько гирь, не все они одного веса, и веса не обязательно целые. В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в тройке. Докажите, что число гирь делится на 3.

(А. Шаповалов)

Старшая лига

38. Петя и Вася по очереди красят ребра 77-угольной пирамиды, по одному за ход. Можно красить еще не окрашенное ребро, у которого все смежные ребра не окрашены. Кто не может сделать ход — проигрывает. Начинает Петя. Кто из них может выигрывать, как бы не играл соперник? (Ребра *смежные*, если у них есть общая вершина.)

(А. Шаповалов)

39. На бесконечной клетчатой доске стоят 2013 фигур: кони, ладьи и ферзи. Известно, что каждая фигура бьет ровно одну другую и побита ровно одной другой. Докажите, что есть ферзь, который бьет свою фигуру по диагонали.

(А. Шаповалов)

40. Прямоугольная доска разбита прямыми, параллельными сторонам, на 99 строк и 99 столбцов, то есть на 99^2 клеток-прямоугольников. Некоторые прямоугольники отметили. Среди отмеченных прямоугольников нет равных, а каждый неотмеченный равен какому-нибудь отмеченному. Может ли быть отмечено ровно 1999 прямоугольников?

(А. Шаповалов)

41. По кругу стоят несколько гирь, не все они одного веса, и веса не обязательно целые. В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему

арифметическому весов гирь в тройке. Докажите, что число гирь делится на 3.

(А. Шаповалов)

42. В колоде из 52 карт потерян туз пик. Про любую пару карт одной масти или одного достоинства известно, сколько карт между ними лежит. Докажите, что этого достаточно, чтобы узнать пару, составленную из самой верхней и самой нижней карт колоды.

(А. Шаповалов)

Геометрия

Младшая лига

43. На сторонах AC и BC треугольника ABC лежат точки D и E соответственно, такие, что $\angle ABD = \angle CBD = \angle CAE$. Кроме того, $\angle ACB = \angle BAE$. Обозначим через F точку пересечения BD и AE . Докажите, что $AF = DE$.

(Ф. Ивлев, Ф. Бахарев)

44. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Диагонали AD и BE пересекаются в точке X , диагонали AD и CF — в точке Y , а диагонали BE и CF — в точке Z . Оказалось, что $AX = DY$ и $CY = FZ$. Докажите, что $BX = EZ$.

(Д. Максимов, Ф. Петров)

45. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ выполнено $AB > CD$ и $BC > AD$. На лучах AB и CD выбраны точки K и M соответственно так, что $AK = CM = \frac{1}{2}(AB + CD)$, а на лучах BC и DA — точки L и N соответственно так, что $BL = DN = \frac{1}{2}(BC + AD)$. Докажите, что $KLMN$ — прямоугольник и площадь его равна площади $ABCD$.

(Eisso J. Atzema, предложил В. Дубровский)

46. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC точки O и H — это соответственно центр описанной окружности и точка пересечения высот. Окружность ω_A симметрична описанной около треугольника AOH окружности относительно прямой AO . Аналогично определяются окружности ω_B и ω_C . Докажите, что окружности ω_A , ω_B и ω_C пересекаются в одной точке, лежащей на описанной окружности треугольника ABC .

(Ф. Бахарев по мотивам Iran TST 2013)

Старшая лига

47. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 . Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что площади треугольников AOB_1 и BOA_1 равны.

(фольклор)

48. Даны концентрические окружности ω и γ , причем γ лежит внутри ω . На окружности ω выбрана произвольная точка O , из которой проведены касательные OA и OB к окружности γ . Окружность с центром в точке O и радиусом OA пересекает окружность ω в точках C и D . Докажите, что прямая CD содержит среднюю линию треугольника OAB .

(Ф. Ивлев)

49. При каких $a > 1$ существует выпуклый многогранник, отношение площадей любых двух граней которого больше a ?

(А. Шаповалов)

50. Пусть H , I и O — соответственно точка пересечения высот, центры вписанной и описанной окружностей остроугольного треугольника ABC . Докажите, что $\angle AIH = 90^\circ$ тогда и только тогда, когда $OI \parallel BC$.

(Ф. Ивлев, решила Ю. Зайцева)

Командная олимпиада

Младшая лига

51. (3) В семье, кроме папы и мамы, двое детей. Все зовут друг друга по имени. Принято, обращаясь к своему ребенку или своему родителю, перечислять всех упомянутых от младшего к старшему, а в разговорах между детьми или между родителями — наоборот. Лёша сказал Свете: «Мы идем в театр: Настя, я и Володя». Как зовут папу и маму?

(А. Шаповалов)

52. (4) Перед началом шахматного турнира участники были занумерованы. Каждый с каждым сыграл по разу. Во всех партиях, которые не закончились вничью, у победителя номер был меньше, чем у побеждённого. Петя победил Васю, но набрал по результатам турнира меньше очков, чем Вася. Каково наименьшее возможное число участников турнира? (Давали 1 очко за победу, 0.5 за ничью, 0 за поражение.)

(А. Шаповалов)

53. (5) Натуральные числа m и $n > 1$ таковы, что $4^m - 1$ делится на n , а $n - 1$ делится на 2^m . Докажите, что $n = 2^m + 1$.

(Indonesia NO 2012)

54. (6) Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . На продолжении стороны AB за точку B отмечена точка D такая, что $\angle DCB = \angle BCA$. На высоте BH треугольника ABC отмечена точка E такая, что $DE = DC$. Докажите, что $\angle BDE = \frac{1}{3}\angle BDC$.

(Georgia TST 2005)

55. (6) В треугольнике ABC выбрана точка P такая, что $\angle ABP = \angle CPM$, где M — середина стороны AC . Прямая MP повторно пересекает описанную окружность треугольника APB в точке Q . Докажите, что $QA = PC$.
56. (7) Дана последовательность натуральных чисел $u_0, u_1, \dots$, причем $u_0 = 1$. Оказалось, что существует натуральное k такое, что равенство $u_{n+1}u_{n-1} = ku_n$ верно при всех натуральных n . Известно также, что $u_{2013} = 100$. Найдите k .

(British Olympiad 1995)

57. (8) Три бегуна тренируются на одной прямой дорожке. Их скорости различны, но постоянны. Добежав до конца дорожки, бегун мгновенно разворачивается и бежит обратно, затем разворачивается на другом конце, и т.д. Пять раз случилось, что все бегуны оказывались в одной точке. Докажите, что такие встречи всех троих будут продолжаться и впредь.

(А. Шаповалов)

58. (10) Положительные числа x, y и z таковы, что $x + y + z = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{xy}{\sqrt{z + xy}} + \frac{yz}{\sqrt{x + yz}} + \frac{zx}{\sqrt{y + zx}} \leq \frac{1}{2}.$$

(Д. Максимов)

59. (11) Можно ли раскрасить точки плоскости в 2013 цветов (то есть сопоставить каждой точке плоскости натуральное число от 1 до 2013) так, чтобы на любой прямой и на любой окружности (ненулевого радиуса) встречались бы точки всех цветов?

(Жюри)

Старшая лига

60. (3) Две медианы разбивают треугольник на четырехугольник и три равнобедренных треугольника. Докажите, что исходный треугольник тоже равнобедренный.

(А. Шаповалов)

61. (4) Существуют ли 2013 ненулевых вещественных чисел $x_1, x_2, \dots, x_{2013}$ таких, что для бесконечно многих натуральных n верно равенство $x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2013}^n = 0$?

(А. Устинов)

62. (4) Есть куб со стороной 1 м и набор из пяти красок. Сначала Петя режет куб на равные меньшие кубики размера не более 1 см (размер он выбирает сам). Затем Вася красит кубики как хочет (не обязательно все одинаково), но так, чтобы каждая грань была одноцветна. Наконец, Петя складывает куб, используя все кубики. Докажите, что независимо от действий Васи Петя может добиться того, чтобы каждая грань большого куба была одноцветной.

(А. Шаповалов)

63. (5) Пусть $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — неубывающая мультипликативная функция (т.е. для любых взаимно простых натуральных m и n верно равенство $f(mn) = f(m)f(n)$). Докажите, что

$$f(8)f(13) \geq (f(10))^2.$$

(фольклор)

64. (5) Три бегуна тренируются на одной прямой дорожке. Их скорости различны, но постоянны. Добежав до конца дорожки, бегун мгновенно разворачивается и бежит обратно, затем разворачивается на другом конце, и т.д. Пять раз случилось, что все бегуны оказывались в одной точке. Докажите, что такие встречи всех троих будут продолжаться и впредь.

(А. Шаповалов)

65. (6) Пусть $p > 3$ — простое число. Докажите, что следующая сумма делится на p :

$$\left(\sum_{2 \leq i < j < k \leq p-1} ijk \right) + 1.$$

(Indonesia NO 2013)

66. (6) На сторонах AB , BC , CD и DA ромба $ABCD$ соответственно выбраны точки E , F , G и H таким образом, что отрезки EF и GH касаются вписанной в ромб окружности. Докажите, что прямые EH и FG параллельны.

(Georgia TST 2005)

67. (8) Дан граф, степени всех вершин которого не превосходят 7. Оказалось, что его вершины нельзя покрасить правильным образом в 6 цветов. Докажите, что в нем есть три попарно соединенные вершины.

(Г. Ненашев)

68. (9) Докажите, что в остроугольном треугольнике сумма длин медиан не превосходит суммы радиусов вневписанных окружностей.

(Ф. Ивлев)

69. (10) Для натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_r$, больших 1, через $[a_1, a_2, \dots, a_r]$ обозначим выражение

$$\frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{a_r}}}}.$$

Даны две конечные последовательности $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_m$ натуральных чисел, больших 1, такие, что

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] + [b_1, b_2, \dots, b_m] \geq 1.$$

Докажите, что найдутся индексы n_1 и m_1 ($1 \leq n_1 \leq n$ и $1 \leq m_1 \leq m$) такие, что

$$[a_1, a_2, \dots, a_{n_1}] + [b_1, b_2, \dots, b_{m_1}] = 1.$$

(А. Устинов)