Многоборье-2013 (с решениями)

Регата

Младшая лига

Первый тур

1. Имеется куча из нескольких конфет. Сначала Малыш съедает из этой кучи одну конфету, затем Карлсон съедает из этой кучи две конфеты, затем Малыш — три, Карлсон — четыре и так далее. Если в какой-то момент число оставшихся конфет меньше, чем должен съесть Малыш или Карлсон очередным ходом, то он доедает все конфеты. Оказалось, что Малыш съел 101 конфету. Сколько всего конфет было изначально?

▫ *Ответ:* 211. Заметим, что число конфет, съеденных Малышом, — это сумма первых нескольких нечетных чисел, то есть точный квадрат. Но в итоге Малыш съел 101 конфету, а значит в свой последний ход Малыш доел оставшиеся конфеты. Значит, в этот момент могла остаться только одна конфета (иначе бы последним ходом Малыш съел не менее 20 конфет и значит у него должно было уже быть не менее 10^2 конфет, что не так). Значит Малыш съел от 1 до 19 конфет (только нечетные числа) и еще одну, а Карлсон съел количества конфет от 2 до 20. Значит всего изначально было $1+2+\ldots+19+20+1=211$ конфет.

(А. Шаповалов)

2. Точки M, N, P — середины сторон AB, CD и DA вписанного четырехугольника $ABCD$. Известно, что $\angle MPD = 150°$, $\angle BCD = 140°$. Найдите угол $\angle PND$.

▫ *Ответ:* $110°$. Рис. 1. Средняя линия PN параллельна AC, поэтому $\angle PND = \angle ACD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$. С другой стороны, $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = \angle ADB = \angle APM = 30°$ и $\frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD} = 40°$. Поскольку $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BCD} = 360°$, то $\angle PND = 110°$.

(Д. Максимов)

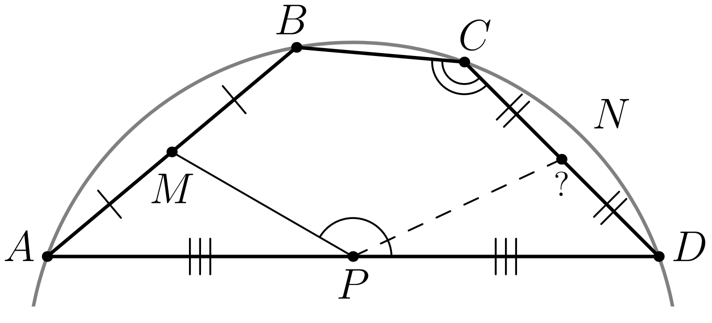

Рис. 1: к задаче 2.

3. Трём братьям надо перевезти с одной квартиры на другую рояль весом 250 кг, диван весом 100 кг и более 100 коробок по 50 кг. Был нанят небольшой фургон с шофером на 5 рейсов туда (и 4 обратно), который может за раз перевезти 500 кг груза и одного пассажира. Погрузить или выгрузить диван братья могут вдвоём, рояль — втроём, с коробками любой из братьев справляется в одиночку. Надо перевезти всю мебель и как можно больше коробок. Какое наибольшее число коробок удастся перевезти? (Шофер не грузит, другого транспорта и помощников нет, пассажиров вместо груза везти нельзя).

□ *Ответ:* 33 коробки. *Пример.* Последовательность рейсов:

1. Загрузим рояль и 5 коробок, уедет один брат. Там он выгрузит коробки и останется. Фургон с роялем вернутся.
2. Загрузим диван и 3 коробки, уедет еще один брат. Там братья выгрузят диван и коробки. Фургон без пассажиров с роялем вернется.
3. Грузим 5 коробок. С фургоном едет последний брат. Там братья выгрузят всё. Фургон вернется пустым с одним братом.
4. Грузят 10 коробок. Там их выгружают. Фургон возвращается пустым и без пассажиров.
5. Грузят 10 коробок. Там их выгружают.

Оценка. Всего можно перевезти 2500 кг груза. От момента погрузки рояля до момента его выгрузки фургон сделает не менее 3 рейсов туда, чтобы перевезти трёх братьев. Значит, рояль съездит «туда» не менее 3 раз. Вычитая $3 \cdot 250$ кг и 100 кг дивана, получаем, что перевезено не более 1650 кг коробок, то есть, не более 33 коробок.

(А. Шаповалов, Д. Шаповалов)

Второй тур

4. По кругу стоят 2013 натуральных чисел. Оказалось, что в любой паре соседних чисел одно из них делится на другое. Докажите, что найдутся два несоседних числа, одно из которых тоже делится на другое.

□ Поставим между соседними числами стрелочку в направлении от числа к его делителю (если числа равны, поставим числа в обе стороны). Заметим, что если есть две соседние стрелочки одного направления, то первое число в такой тройке делится на второе, а второе на третье, то первое и третье число образуют требуемую пару. Если же таких стрелочек нет, то направление стрелочек чередуется, что возможно только если их четное число. Но их 2013.

(А. Шаповалов)

5. На плоскости даны 2013 отрезков единичной длины, каждый пересекается с каждым. Докажите, что все их можно накрыть кругом радиуса 1.5.

□ Рассмотрим круг радиуса 1.5 с центром O в середине некоторого отрезка s. Очевидно, s будет полностью накрыт кругом. Рассмотрим любую точку A

другого отрезка p. Отрезки s и p пересекаются в некоторой точке B. Тогда OB не длиннее половины отрезка s, а BA не длиннее отрезка p. Значит, ломаная OBA не длиннее 1.5, тем более это верно для отрезка OA. Тем самым, точка A накрыта кругом. Это верно для всех точек, значит, все отрезки накрыты этим кругом.

(А. Шаповалов)

6. Фабрика выпускает наборы из $n > 2$ слоников различной величины. По стандарту разница масс соседних слоников внутри каждого набора должна быть одной и той же. Контролер проверяет наборы по одному с помощью чашечных весов без гирь. При каком наименьшем n это возможно?

▫ *Ответ:* при $n = 5$. Занумеруем слоников по возрастанию величины, тогда достаточно убедиться, что $C_1 + C_4 = C_2 + C_3$, $C_1 + C_5 = C_2 + C_4$ и $C_2 + C_5 = C_3 + C_4$. Эти равенства равносильны соответственно $C_4 - C_3 = C_2 - C_1$, $C_2 - C_1 = C_5 - C_4$ и $C_5 - C_4 = C_3 - C_2$, то есть все соседние разности равны. При $n = 4$ проверить невозможно, потому что наборы весов $10, 11, 12, 13$ и $10, 11, 13, 14$ дадут при любых взвешиваниях одинаковый результат.

(А. Шаповалов)

Третий тур

7. Вася выписал на доску числа от 1 до 20132013. На сколько больше он написал единиц, чем троек?

▫ *Ответ:* 10041004. Заметим, что среди чисел от 1 до 9999999 будет написано поровну всех ненулевых цифр (в том числе единиц и троек) потому что каждая ненулевая цифра на каждом месте встретится одинаковое количество раз (или можно просто ввести операцию замены троек на единицы и наоборот — это будет разбиение на пары). Среди чисел от 10000000 до 19999999 будет ровно 10000000 лишних единиц. После этого все числа начинаются на пару цифр 20, и это начало не влияет на разность между числом написанных единиц и числом написанных троек. Значит надо рассмотреть числа от 1 до 132013. Среди чисел от 1 до 99999 единиц и троек снова поровну. После этого остаются числа от 100000 до 132013. Эти числа содержат 32014 единиц на первом месте и надо рассмотреть теперь числа от 1 до 32013. Теперь числа от 1 до 29999 содержат 10000 лишних единиц. Далее мы рассматриваем числа от 30000 до 32013 они содержат 2013 лишних троек (на первом месте), 1000 лишних единиц (числа от 31000 до 31999) и наконец среди чисел от 1 до 13 единиц на 4 больше. Итого, суммируя все вышесказанное, имеем, что единиц на $10000000 + 32014 + 10000 - 2014 + 1000 + 4 = 10041004$ больше.

(фольклор, предложил Д. Максимов)

8. В неравнобедренную трапецию $ABCD$ вписана окружность с центром O. Точка M — середина более длинного основания AB. Прямая MO пересекает отрезок CD в точке F. E — точка касания CD и окружности. Докажите, что $DE = CF$ тогда и только тогда, когда $AB = 2CD$.

▫ Рис. 2. Пусть X — точка касания отрезка AB и окружности, T — точка пересечения AD и BC. Будем для определенности считать, что $AX > BX$, тогда $FE = XM = \frac{AX-BX}{2} = \frac{TA-TB}{2}$. В последнем равенстве мы воспользовались тем, что расстояние от вершины до точки касания с вписанной окружности в треугольнике равно разности полупериметра и соответствующей стороны. С другой стороны $CE - DE = TD - TC$. На этот раз мы воспользовались формулой для расстояния от вершины до точки касания с вневписанной окружностью. Теперь отметим, что $DE = CF$ тогда и только тогда, когда $FE = CE - DE$, что эквивалентно равенству $\frac{TA-TB}{2} = TD - TC$. В силу теоремы Фалеса это равносильно тому, что DC есть средняя линия треугольника TAB.

(Polish NO 1993)

9. Шахматная доска покрыта 32 домино (каждое домино покрывает ровно два поля). Докажите, что эти домино можно повернуть на 90 или на 180 градусов (каждое — вокруг центра одной из закрываемых им клеток, поворачивать можно независимо друг от друга и в любую сторону), чтобы по-прежнему вся доска была покрыта.

▫ Разобьем доску на клетки 2×2. Уложим второй слой домино так: если в клетке лежит целиком горизонтальное домино, кладем на нее два вертикальных, иначе — два горизонтальных. В результате ни одно верхнее домино не совпадет по положению с нижним. А теперь вспомним о шахматной раскраске доски и повернем каждое нижнее домино так, чтобы оно заняло положение верхнего домино, закрывающего ту же белую клетку.

(А. Шаповалов)

Четвертый тур

10. В клетках квадрата 100×100 вписаны натуральные числа так, что все 200 сумм в рядах (строках и столбцах) различны. Какова наименьшая возможная сумма всех чисел в таблице?

▫ *Ответ:* 19950. Будем для удобства считать, что числа могут быть нулями (потом добавим к каждому числу по единице). Тогда сумма в каждом ряду хотя бы 0, и значит минимально возможные значения этих сумм от 0 до

0						
1	2					
	0	4				
		1	6			
				$\ddots$		
					196	
					1	198

Таблица 1: к задаче 10.

199, а минимально возможная сумма — это $199 \cdot 200/4 = 9950$. Покажем, что существует пример, когда реализуются ровно такие суммы. Для этого на главной диагонали расставим четные числа от нуля до 198, на второй диагонали единицы в клеточках через 1 (таблица 1). Остальные числа объявим нулями. Теперь, чтобы получился пример для исходной задачи, добавим к каждому числу в таблице по единице.

(Д. Максимов)

11. В параллелограмме $ABCD$ выполнено $BD = BC$. Точка M на AC такова, что $3AM = AC$. Докажите, что $AM = BM$.

▫ Рис. 3. Точка M лежит на медиане треугольника ABD и делит её в отношении $2:1$, считая от вершины A. Следовательно, M — точка пересечения медиан треугольника ABD. Требуемое равенство следует из равнобедренности треугольника ABD.

(13-й Уральский турнир, высшая лига)

12. На нижней ступеньке лестницы из 350 ступенек лежит 350 камней, остальные ступеньки пусты. За одну ходку Сизиф может взять с любой ступеньки группу из одного или нескольких камней (не обязательно всех, лежащих на этой ступеньке), и переложить всю группу вверх или вниз на число ступенек, равное числу камней в группе (группу из одного камня на соседнюю ступеньку, группу из двух камней — через одну ступеньку вверх или вниз и т. д.). Помогите Сизифу переложить все камни на соседнюю ступеньку, сделав не более 21 ходки.

▫ Будем нумеровать ступеньки снизу вверх, считая ступеньку, на которой лежат камни, нулевой. Вначале Сизиф должен семь раз поднять по 50 камней на ступеньку с номером 50. Затем — семь раз спустить по 49 камней на ступеньку с номером 1. После этого нужно семь раз прыгнуть оставшимися 7-ю камнями на 7 ступенек вниз.

(А. Шаповалов)

Старшая лига

Первый тур

13. Назовем натуральное число *интересным*, если оно — степень тройки или представимо в виде суммы различных степеней тройки. Интересные числа занумеровали по возрастанию. Найдите сотое число.

▫ *Ответ:* $1100100_3 = 981$. Заметим, что если мы заменим в интересных числах тройку на двойку, то порядок чисел сохранится и интересными окажутся все числа. То есть сотое по порядку число окажется число 100, которое имеет вид $2^6 + 2^5 + 2^2$. Это значит, что сотое по порядку интересное число — $3^6 + 3^5 + 3^2$.

(фольклор)

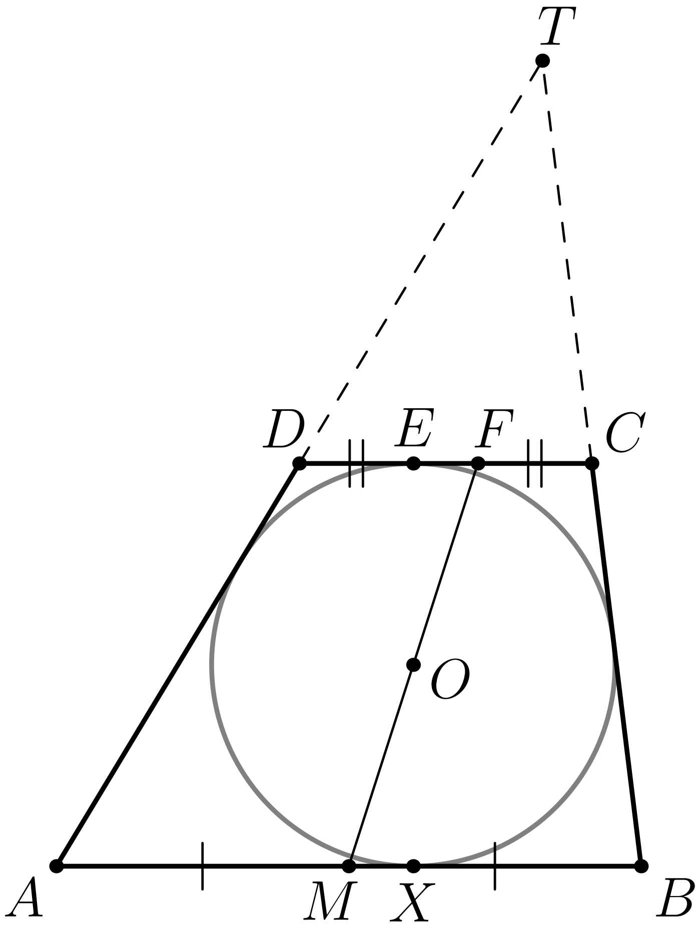

Рис. 2: к задаче 8.

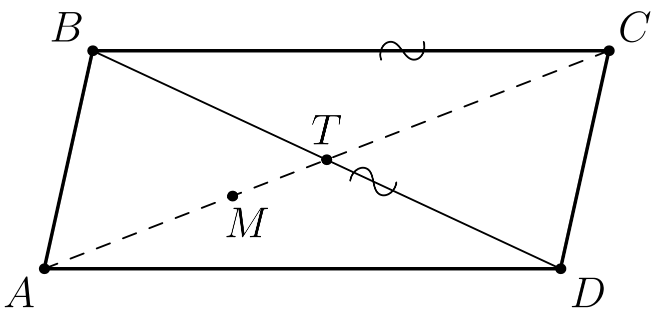

Рис. 3: к задаче 11.

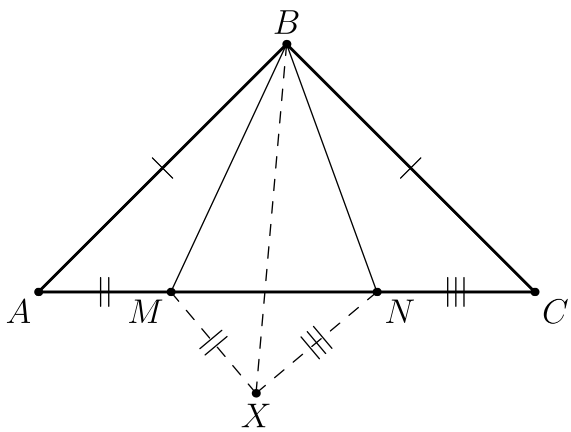

Рис. 4: к задаче 14.

14. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AC выбрали точки M и N (M между A и N). Оказалось, что $\angle MBN = 45^\circ$. Докажите, что из отрезков AM, MN и NC можно сложить прямоугольный треугольник.

▫ Рис. 4. Точка X, симметричная A относительно BM, совпадает с точкой, симметричной C относительно BN. Треугольник XMN — искомый.

Другое решение. Рис. 5. Построим точку D по ту же сторону от AC, что и точка B, такую, что $CD \perp AC$, $CD = AM$. Тогда, поскольку $\angle BAM = \angle BCD = 45^\circ$, треугольники $\triangle ABM$ и $\triangle BCD$ равны. Следовательно, $\angle DBN = \angle DBC + \angle CBN = \angle MBA + \angle CBN = 45^\circ$. Таким образом, равны треугольники $\triangle MBN$ и $\triangle DBN$ и $DN = MN$. Прямоугольный треугольник $\triangle DNC$ имеет нужные стороны.

(фольклор)

15. Вершины замкнутой несамопересекающейся восьмизвенной ломаной совпадают с вершинами куба. Докажите, что у этой ломаной найдутся четыре звена одинаковой длины.

▫ Пусть ребро куба равно 1. У ломаной могут быть звенья трёх длин: 1 (ребро куба), $\sqrt{2}$ — диагональ грани, $\sqrt{3}$ — большая диагональ куба. Но если больших диагоналей две, то они пересекаются в центре куба. Значит, есть не более одной большой диагонали, и 7 длин двух других видов. Среди последних есть не менее 4 равных.

(А. Шаповалов)

Второй тур

16. Для скольких натуральных N от 1 до 2013 уравнение $x^{[x]} = N$ имеет решение в положительных вещественных x? ($[x]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее x.)

▫ *Ответ:* 412 чисел. Заметим, что подходящие числа N для x таких, что $[x] = n$ — это числа от n^n до $(n+1)^n - 1$, то есть в точности такие числа, что $[\sqrt[n]{N}] = n$. Такие числа (среди чисел от 1 до 2013) — это число 1, числа от 2^2

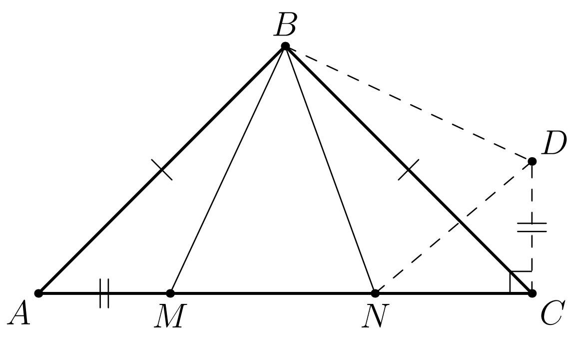

Рис. 5: к задаче 14 (другое решение).

до 3^2-1 (их ровно 5), числа от 3^3 до 4^3-1 (их ровно 37), числа от 4^4 до 5^4-1 (их ровно 369). Итого мы получаем всего $1+5+37+369=412$ чисел.

(фольклор)

17. Пусть Q — точка внутри выпуклого многогранника M. Прямая ℓ, проходящая через Q, пересекает поверхность многогранника в точках A и B. Докажите, что для бесконечного множества направлений прямой ℓ верно, что $AQ = BQ$.

▫ Пусть M' — многогранник, симметричный M относительно Q. Многогранники M и M' пересекаются, ибо оба содержат точку Q. При этом ни один из них не содержится в другом, поскольку объемы M и M' равны. Следовательно, пересекаются поверхности многогранников M и M', и пересечение поверхностей содержит отрезок. Для любой точки A, лежащей на обеих поверхностях, прямая $\ell = AQ$ подходит в условие задачи.

(Putnam 1977 B4 Problem)

18. На доске $4n \times 4n$ расставляют $4n^2$ королей так, чтобы они не били друг друга. Докажите, что число таких расстановок не больше, чем 12^{2n^2}.

▫ Разобьем доску на $4n^2$ клеток 2×2. В каждой клетке может стоять не более одного короля, поэтому в каждой — ровно по королю. Разобьем теперь доску на горизонтальные домино из пар таких клеток. В каждом домино пару не бьющих друг друга королей можно расставить 12 способами (пару несоседних вертикалей можно выбрать тремя способами, в каждой паре двух королей можно расставить 4-мя способами). Есть $2n^2$ домино, независимых расстановок в них 12^{2n^2}.

(А. Шаповалов)

Третий тур

19. У квадратного трехчлена ax^2+bx+c коэффициент $a \neq 0$. Докажите, что при некотором иррациональном x значение ax^2+bx+c — рационально.

▫ Если $a < 0$, сменим все знаки. Обозначим полученный трехчлен через $P(x)$. Выберем достаточно большое рациональное число r, чтобы у уравнения $P(x)-r$ были два корня: x_1 и x_2. Тогда по теореме Виета $P(x)-r = a(x-x_1)(x-x_2)$. Если хотя бы один из корней — иррационален (скажем, x_1), то $P(x_1) = r$ — рационально, то есть x_1 — искомое. Пусть оба корня — рациональны. Разберем два случая.

Случай 1: a — иррационально. Левая часть принимает все положительные значения, в частности, значение 1. Тогда уравнение $a(x-x_1)(x-x_2) = 1$ имеет корень, скажем x_0. Если бы x_0 был рациональным, то и $a = 1/(x_0-x_1)(x_0-x_2)$ было бы рациональным. Значит, x_0 — иррационально. И тогда $P(x_0) = 1+r$ — рационально, то есть x_0 — искомое.

Случай 2: a — рационально. Выделим в выражении $a(x-x_1)(x-x_2)$ полный квадрат, получим $a(x-x_3)^2+b$, где x_3 и b — рациональны. Если в него подставить иррациональное число $x = x_3+\sqrt{2}$, получим рациональное число $2a+b$.

Тогда и $P(x) = 2a + b + r$ — рациональное.

(С. Когаловский, А. Шаповалов)

20. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ на сторонах AB, BC, CD и DA лежат точки K, L, M и N соответственно, такие что $AK = KB = 6$, $BL = 3$, $LC = 12$, $CM = 4$, $MD = 9$, $DN = 18$, $NA = 2$. Докажите, что четырехугольник $KLMN$ вписанный.

▫ Степени точек K, L, M и N относительно окружности равны соответственно $6 \cdot 6$, $3 \cdot 12$, $4 \cdot 9$, $18 \cdot 2$, то есть равны между собой. Следовательно, расстояния от этих точек до центра описанной окружности четырехугольника $ABCD$ равны. Поэтому точки K, L, M и N лежат на окружности с тем же центром.

(Ф. Бахарев)

21. Назовем *ценной цифрой* числа любую из цифр, встречающихся в его десятичной записи не большее число раз, чем каждая из остальных цифр (это может быть и цифра, не встречающаяся в записи n). Петя составляет бесконечную последовательность цифр: на n-е место он ставит любую из ценных цифр числа n. Может ли Петя получить последовательность, периодическую с некоторого места?

▫ *Ответ:* нет. Пусть длина периода $T < 10^m$. Рассмотрим число n, расположенное дальше предпериода и состоящее из не менее чем $3m$ девяток, не менее чем $3m$ восьмерок, $\ldots$, не менее чем $3m$ двоек, и $3m$ нулей на конце. У всех чисел от n до $n+T$ цифра 1 встречается реже остальных. Следовательно, весь период состоит из единиц. Но для номеров, состоящих только из единиц, все элементы последовательности будут не единицами. Противоречие.

(А. Шаповалов)

Четвертый тур

22. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник. Все ребра этой призмы имеют натуральные длины, а площади некоторых двух её граней равны 13 и 30. Найдите стороны основания этой призмы.

▫ *Ответ:* 5, 12, 13. Докажем, что из двух указанных граней хотя бы одна является основанием. Пусть это не так. Если высота равна 1, а то у треугольника в основании стороны равны 13 и 30, что не может быть у прямоугольного треугольника с натуральными сторонами. Если же высота призмы больше единицы, то площади боковых граней делятся на эту высоту и не могут быть взаимно просты. Значит либо 13, либо 30 — это площадь основания. Если площадь основания 13, то произведение катетов равно 26, то есть это либо 1 и 26, либо 2 и 13, в обоих случая гипотенуза не получается равна натуральному числу. Значит площадь основания 30, и площадь одной из боковых граней — 13. Это может быть только если высота равна 1, а сторона основания 13 (у прямоугольного треугольника с натуральными сторонами сторона не может быть равна 1). Произведение катетов равно 60, значит среди них нет стороны равной 13, то есть 13 — это гипотенуза. Тогда несложно убедиться, что катеты — это 12 и 5.

(KöMaL journal)

23. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность Г. Биссектриса угла A пересекает отрезок BC в точке E. Пусть M — середина дуги BAC. Прямая ME повторно пересекает Г в точке D. Докажите, что центр описанной окружности треугольника AED совпадает с точкой пересечения касательной к Г в точке D и прямой BC.

◻ Рис. 6. Предположим, что $AB < AC$, тогда точка D располагается на дуге BC ближе к точке B, чем к C. Тогда O — точка пересечения касательной в точке D и прямой BC, лежит в той же полуплоскости относительно DE, что и точка A. Тогда $\angle ODE = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DBM} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{BM}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{MC}) = \angle OED$. Следовательно, достаточно проверить, что $\angle DOE = 2\angle DAE$, но это равенство очевидно, поскольку $\angle DOE = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{BD}) = \overset{\frown}{DX}$, где X — точка пересечения AE с окружностью.

(Italy TST 2002)

24. На доске выписано $2n^2 + 5n$ натуральных чисел, не обязательно различных. Каждое число равно количеству выписанных чисел, не равных ему. Каково наибольшее количество различных чисел среди выписанных?

◻ *Ответ:* $2n + 1$. Обозначим $M = 2n^2 + 5n$. *Пример.* Выпишем 1 раз число $M-1$, 2 раза число $M-2$, …, $2n$ раз число $M-2n$, и, наконец, $4n$ раз $M-4n$. *Оценка.* Разобьем выписанные числа на группы равных. Если в группе k чисел, то эти числа равны $M-k$. Тогда для различных чисел размеры их групп различны. Однако уже сумма $2n+2$ различных натуральных чисел не менее $1 + 2 + \ldots + (2n+2) = (2n+3)(n+1) = 2n^2 + 5n + 3 > M$.

(А. Шаповалов)

Алгебра и теория чисел

Младшая лига

25. Найдите все такие натуральные n и k, что $1! + 3! + \ldots + (2n-1)! = k^2$.

◻ Заметим, что $n = k = 1$ подходит, а при $n = 2$ левая часть равна 7, что не дает решение. При $n \geqslant 3$ левая дает остаток 3 от деления на 4 (или оканчивается цифрой 7), а потому не может быть квадратом.

(KöMaL journal)

26. Положительные числа a, b и c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$. Докажите неравенство

$$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} + b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)} + c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \geqslant 2\sqrt{abc}.$$

□ Заметим, что $(1-b^2)(1-c^2) = 1-b^2-c^2+b^2c^2 = a^2+2abc+b^2c^2 = (a+bc)^2$ (мы воспользовались равенством $1-b^2-c^2 = a^2+2abc$, которое следует из условия). Отсюда получаем, что $a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} = a(a+bc) = a^2+abc$. Применяя это наблюдение ко всем трем слагаемым, мы получаем, что нам нужно доказать неравенство $a^2+abc+b^2+abc+c^2+abc \geqslant 2\sqrt{abc}$. Вновь используя данное в условии равенство, мы сводим наше неравенство к неравенству $1+abc \geqslant 2\sqrt{abc}$, которое является неравенством о средних.

(Crux Mathematicorum)

27. Найдите все такие натуральные a и b, что $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ является корнем уравнения $x^2+ax-b=0$.

□ *Ответ:* $a=2$, $b=1$. Подставим в наше уравнение выражение $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. После несложных алгебраических преобразований мы получим равенство:

$$\sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}+2}.$$

Теперь возведем это равенство в квадрат и получится выражение $(4b-2a)\sqrt{a} = c$, где c — целое число. Отсюда следует, что либо $a=2b$, либо $\sqrt{a}$ — рациональное число. Первый случай мы разберем позже, а из второго наблюдения немедленно следует, что $\sqrt{a}$ — целое. В этом случае $\sqrt{b}$ — также рациональное, а значит — целое. Тогда, обозначая через a_1 значение $\sqrt{a}$ (целое число), получаем, что $a_1(a_1+1)$ должно делится на a_1+2. Но это невозможно, так как a_1+1 взаимно просто с a_1+2, а a_1 просто меньше. Таким образом, обязательно $a=2b$. Подставляя это в исходное уравнение и решая его относительно $\sqrt{b}$, мы находим, что $\sqrt{b}=1$. То есть получаем, что $b=1$ и $a=2$. Этот набор подходит.

(Д. Максимов)

28. Найдите все функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что $f(f(n)) + f(n) = 2n+6$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

□ *Ответ:* $f(n) = n+2$. Запишем данное нам равенство в виде $(f(f(n)) - f(n) - 2) + 2(f(n) - n - 2) = 0$. Пусть нашлось такое натуральное n, что $f(n)-n-2 \neq 0$. Обозначим эту разность через k. Тогда аналогичное выражение при замене n на $f(n)$ равно $-2k$ (это следует из записанного нами равенства). Таким образом, мы получаем, что если $m = f(f(\ldots f(f(n))\ldots))$ (функция берется q раз), то $f(m)-m-2 = (-2)^q k$ или $f(m)-m = 2+(-2)^q k$. Складывая такие равенства для всех q от 0 до N, мы получаем, что $f(f(\ldots f(f(n))\ldots)) - n = 2N+2-\frac{1}{3}((-2)^{N+1}-1)k$. Подбирая подходящим образом N, мы сделаем правую часть меньше $-n$ и получим, что значение функции в некоторой точке оказалось отрицательным, что невозможно. Значит, ни в какой точке значение функции не может отличаться от $n+2$.

(Д. Максимов)

Старшая лига

29. В клетках квадрата 100×100 вписаны натуральные числа так, что все 200 сумм в рядах (строках и столбцах) различны. Какова наименьшая возможная сумма всех чисел в таблице?

□ *Ответ:* 19950. См. решение задачи 10.

(Д. Максимов)

30. Пусть возрастающая функция $f\colon (0;\infty) \to (0;\infty)$ для любого $x > 0$ удовлетворяет неравенству $f(2x) \leqslant 4f(x+1)$. Докажите, что для любого $x > 1$ выполнено

$$f(x) \leqslant f(4)x^2.$$

□ По условию задачи

$$f(x) \leqslant 4^1 f\left(\frac{x}{2}+1\right) \leqslant 4^2 f\left(\frac{x^2}{2^2}+\frac{1}{2}+1\right) \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant 4^k f\left(\frac{x^k}{2^k}+\frac{1}{2^{k-1}}+\ldots+\frac{1}{2}+1\right) \leqslant 4^k f\left(\frac{x^k}{2^k}+2\right).$$

Выбрав k из условия $2^k \leqslant x < 2^{k+1}$, получаем, что $4^k \leqslant x^2$ и $f(x) \leqslant x^2 f(2+2) = f(4)x^2$.

(В. Быковский)

31. Пусть

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = y_1+y_2+y_3+y_4,$$
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2,$$
$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3 = y_1^3+y_2^3+y_3^3+y_4^3.$$

Докажите, что

$$(x_1-y_2)(x_1-y_3)(x_1-y_4) = (y_1-x_2)(y_1-x_3)(y_1-x_4).$$

□ Пусть

$$\sigma_m(x) = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant 4} x_{i_1}\ldots x_{i_m},$$
$$\sigma_m(y) = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant 4} y_{i_1}\ldots y_{i_m} \qquad (1\leqslant m\leqslant 4)$$

— элементарные симметрические многочлены от наборов x и y, и

$$s_j(x) = \sum_{k=1}^{4} x_k^j, \quad s_j(y) = \sum_{k=1}^{4} y_k^j \qquad (j \geqslant 1).$$

Тогда из равенств $s_1(x) = s_1(y)$, $s_2(x) = s_2(y)$, $s_3(x) = s_3(y)$ следует равенство элементарных симметрических многочленов от наборов x и y:

$$\sigma_1(x) = \sigma_1(y), \quad \sigma_2(x) = \sigma_2(y), \quad \sigma_3(x) = \sigma_3(y). \tag{1}$$

Это можно проверить, например, с помощью формул Ньютона

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= s_1, \\ \sigma_2 &= \sigma_1 s_1 - s_2, \\ \sigma_3 &= \sigma_2 s_1 - \sigma_1 s_2 + s_3. \end{aligned}$$

Рассмотрим многочлены

$$f(z) = (z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)(z - x_4), \quad g(z) = (z - y_1)(z - y_2)(z - y_3)(z - y_4).$$

Из равенств (1) и теоремы Виета следует, что многочлен $h(z) = f(z) - g(z)$ является константой. Значит, $-g(x_1) = h(x_1) = h(y_1) = f(y_1)$, то есть

$$-(x_1 - y_1)(x_1 - y_2)(x_1 - y_3)(x_1 - y_4) = (y_1 - x_1)(y_1 - x_2)(y_1 - x_3)(y_1 - x_4). \tag{2}$$

Если $x_1 \neq y_1$, то, сокращая на $(y_1 - x_1)$, приходим к нужному равенству

$$(x_1 - y_2)(x_1 - y_3)(x_1 - y_4) = (y_1 - x_2)(y_1 - x_3)(y_1 - x_4). \tag{3}$$

Если же $x_1 = y_1$, то из системы

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= y_2 + y_3 + y_4, \\ x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= y_2^2 + y_3^2 + y_4^2, \\ x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 &= y_2^3 + y_3^3 + y_4^3, \end{aligned}$$

как и раньше получаем равенство элементарных симметрических многочленов от наборов (x_2, x_3, x_4) и (y_2, y_3, y_4). По теореме Виета эти два набора чисел являются корнями одного и того же кубического уравнения, то есть совпадают с точностью до перестановки. Следовательно, равенство (3) будет справедливо и в этом случае.

(А. Устинов)

32. Найдется ли последовательность из 1000000 натуральных чисел, взаимно простых с 10, в которой каждое следующее делится на предыдущее, но имеет меньшую сумму цифр?

▫ *Ответ:* найдется. Будем строить такую строку индукцией по длине. Пусть у нас есть нужная строка из m чисел, построим такую строку из $m+1$ числа. Пусть в последнем числе n цифр, и $N > n$. Если умножить числа на $(10^N + 1)$, мы удвоим все суммы цифр и не нарушим делимости. Положим $N = 6n$, тогда $10^{6n} + 1 = (10^{2n} + 1)(10^{4n} - 10^{2n} + 1) = 1\ldots01 \cdot 9\ldots90\ldots01$. Сумма цифр последнего множителя равна $18n + 1$, что больше суммы цифр любого из умноженных чисел. Удлинив умноженную строку влево этим множителем, получим требуемую строку.

(А. Шаповалов)

Комбинаторика и логика

Младшая лига

33. В школьной олимпиаде по математике участвовало 60 человек, по физике — 50, по информатике — 40. Составили три списка: тех, кто участвовал ровно в одной из олимпиад, ровно в двух, ровно в трех. Во всех списках одно и то же число людей. Сколько человек в каждом списке?

□ *Ответ:* 25. Пусть в каждом списке по x человек. Если сложить математиков, физиков и информатиков, то люди из первого списка будут учтены по разу, из второго — по два раза, из третьего — по 3. Получаем уравнение $x + 2x + 3x = 40 + 50 + 60$, откуда $x = 25$.

(А. Шаповалов)

34. Центр правильного 55-угольника соединили отрезками со всеми его вершинами. Вместе со сторонами 55-угольника получилось 110 отрезков. Петя и Вася по очереди красят эти отрезки, по одному за ход. Можно красить отрезок, только если он и выходящие из его концов отрезки не окрашены. Кто не может сделать ход — проигрывает. Начинает Петя. Кто из них может выигрывать, как бы ни играл соперник?

□ *Ответ:* Вася. Разобьем отрезки на пары, сопоставив каждой стороне 55-угольника отрезок, соединяющий противоположную вершину с центром. В ответ на первый ход Пети Вася красит второе отрезок из той же пары. После этого можно красить только некоторые стороны, которые разбиваются на два одинаковых не связанных между собой набора. На ход Пети в любой из наборов Вася повторяет его в другом наборе.

(А. Шаповалов)

35. На клетчатой доске 100×100 стоят 77 коней, 33 ладьи и ферзь. Известно, что каждая фигура бьет ровно одну другую и побита ровно одной другой. Докажите, что ферзь бьет свою фигуру по диагонали.

□ Выбросим пары бьющих друг друга фигур одинакового названия. Разобьем все остальные фигуры на циклы — группы фигур, бьющих друг друга по кругу. В каком-то цикле нечетное число фигур. Если ферзя в нём нет, то в цикле чередуются ладьи и кони, и цикл — четный. Если ферзь есть, но бьет не по диагонали, его можно заменить на ладью, и опять получим четный цикл.

(А. Шаповалов)

36. 33 компьютера попарно соединены проводами. Каждый провод покрашен в один из 32 цветов. Назовем компьютер *радужным*, если из него выходят провода всех цветов. Какое наибольшее число компьютеров могут быть радужными?

□ *Ответ:* 32. Заметим, что все 33 компьютера радужными быть не могут. Действительно, если так получилось, то рассмотрим провода первого цвета. Из каждого компьютера в этом случае выходит ровно один такой провод, и это означает, что компьютеры разбились на пары. Но их 33, поэтому это невозможно. Теперь покажем, что 32 компьютера могут быть радужными. Для это сперва выберем один компьютер и соединим его с остальными 32 проводами одного цвета. Теперь задача свелась к тому, что 32 компьютера соединить проводами 31 цвета так, чтобы все 32 компьютера были радужными. Это просто означает, что нужно разбить все ребра полного графа на 32 вершинах на 31 группу по 16 ребер в каждой так, чтобы в каждой группе ребра попарно не имели общих концов. Для это мы расставим все 32 компьютера по кругу. Теперь рассмотрим циклы с шагом k. Ребра каждого такого цикла раскрасим в цвет $2k-1$ и $2k$ так, чтобы они чередовались (это возможно, так как любой такой цикл имеет четную длину). Наконец для $k = 16$ таких циклов нет, такие ребра мы все покрасим в 31-ый цвет. Полученная раскраска будет требуемой.

(Iran NO 2012)

37. По кругу стоят несколько гирь, не все они одного веса, и веса не обязательно целые. В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в тройке. Докажите, что число гирь делится на 3.

▫ Посчитаем все разности, вычитая из веса гири вес правого соседа. Пусть d — наименьшая по модулю разность весов. Если $d < 0$, сменим все знаки разностей, отразив круг симметрично. Поделив все веса на d, условия не нарушим, но теперь минимальный модуль разности равен 1. Заметим, что если в тройке средний вес — у средней гири, то в этой тройке обе разности равны, а если у крайней, то отношение разностей равно -2. Поэтому все разности принадлежат списку: $1,\ -2,\ 4,\ -8,\ \ldots$ Пройдя по кругу, мы вернемся к тому же весу, поэтому сумма всех разностей равна 0. С другой стороны, по модулю 3 все разности равны 1. Заменив все разности на 1, мы сумму по модулю 3 не изменим. Значит, эта сумма (то есть число гирь) делится на 3.

(А. Шаповалов)

Старшая лига

38. Петя и Вася по очереди красят ребра 77-угольной пирамиды, по одному за ход. Можно красить еще не окрашенное ребро, у которого все смежные ребра не окрашены. Кто не может сделать ход — проигрывает. Начинает Петя. Кто из них может выигрывать, как бы не играл соперник? (Ребра *смежные*, если у них есть общая вершина.)

▫ *Ответ:* Вася. Разобьем ребра на пары, сопоставив каждому ребру основания боковое ребро, проходящее через противоположную вершину основания. В ответ на первый ход Пети Вася красит второе ребро из той же пары. После этого можно красить только некоторые ребра основания, которые разбиваются на два одинаковых не связанных между собой набора. На ход Пети в любой из наборов Вася повторяет его в другом наборе.

(А. Шаповалов)

39. На бесконечной клетчатой доске стоят 2013 фигур: кони, ладьи и ферзи. Известно, что каждая фигура бьет ровно одну другую и побита ровно одной другой. Докажите, что есть ферзь, который бьет свою фигуру по диагонали.

▫ Выбросим пары бьющих друг друга фигур одинакового названия. Разобьем все остальные фигуры на циклы — группы фигур, бьющих друг друга по кругу. В каком-то цикле нечетное число фигур. Если ферзя в нём нет, то в цикле чередуются ладьи и кони, и цикл — четный. Если ферзь есть, но бьет не по диагонали, его можно заменить на ладью, и опять получим четный цикл.

(А. Шаповалов)

40. Прямоугольная доска разбита прямыми, параллельными сторонам, на 99 строк и 99 столбцов, то есть на 99^2 клеток-прямоугольников. Некоторые прямоугольники отметили. Среди отмеченных прямоугольников нет равных, а каждый неотмеченный равен какому-нибудь отмеченному. Может ли быть отмечено ровно 1999 прямоугольников?

▫ *Ответ:* может. Пусть высоты 50 первых строк равны 1, 2, $\ldots$, 50, а все остальные высоты тоже 50. Пусть ширина одного столбца равна 1, второго — 2, далее 53, 54, $\ldots$, 90, а у всех остальных столбцов ширина тоже 90. Строки с высотой 50 можно вычеркнуть все, кроме одной — новых прямоугольников они не дают. Аналогично, столбцы ширины 90 можно вычеркнуть все, кроме одного. Осталось 50 строк и 40 столбцов, на пересечении у них 2000 прямоугольников. Все они различны, кроме двух равных прямоугольников 1×2 и 2×1, поэтому разных всего 1999.

(А. Шаповалов)

41. По кругу стоят несколько гирь, не все они одного веса, и веса не обязательно целые. В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в тройке. Докажите, что число гирь делится на 3.

▫ Посчитаем все разности, вычитая из веса гири вес правого соседа. Пусть d — наименьшая по модулю разность весов. Если $d < 0$, сменим все знаки разностей, отразив круг симметрично. Поделив все веса на d, условия не нарушим, но теперь минимальный модуль разности равен 1. Заметим, что если в тройке средний вес — у средней гири, то в этой тройке обе разности равны, а если у крайней, то отношение разностей равно -2. Поэтому все разности принадлежат списку: $1, -2, 4, -8, \ldots$ Пройдя по кругу, мы вернемся к тому же весу, поэтому сумма всех разностей равна 0. С другой стороны, по модулю 3 все разности равны 1. Заменив все разности на 1, мы сумму по модулю 3 не изменим. Значит, эта сумма (то есть число гирь) делится на 3.

(А. Шаповалов)

42. В колоде из 52 карт потерян туз пик. Про любую пару карт одной масти или одного достоинства известно, сколько карт между ними лежит. Докажите, что этого достаточно, чтобы узнать пару, составленную из самой верхней и самой нижней карт колоды.

□ *Указание.* Карты — точки на числовой прямой (согласно номерам), между некоторыми известно расстояние. Фигура из трех точек с известными расстояниями — жесткая. Значит, наборы по мастям и по достоинствам — жесткие. Набор из 4 карт двух мастей и двух достоинств — четырехугольник с жесткими сторонами. Он нежесткий на прямой только если это параллелограмм. Если он жесткий, то будет жестким объединение некоторой масти и достоинства, и тогда вся конструкция жесткая. А если каждая четверка нежесткая, то масти и достоинства образуют шарнирную конструкцию из параллелограммов, которую можно «выпрямить» двумя способами. При каждом способе номера карт вычисляются и идут с шагом 1, в том числе координата потерянного туза пик. Выпрямим так, чтобы туз пик — назовем его Z — оказался между крайними картами. Тогда его координата должна совпасть с координатой некоторой карты G. Пару G, Z дополним до параллелограмма $GFZH$. Так как при выпрямлении G и Z совместились, то $GFZH$ — ромб. Но тогда при другом выпрямлении совместятся F и H. Противоречие.

(А. Шаповалов)

Геометрия

Младшая лига

43. На сторонах AC и BC треугольника ABC лежат точки D и E соответственно, такие, что $\angle ABD = \angle CBD = \angle CAE$. Кроме того, $\angle ACB = \angle BAE$. Обозначим через F точку пересечения BD и AE. Докажите, что $AF = DE$.

□ Рис. 7. Заметим, что $\angle BAD = \angle BAE + \angle EAD = \angle BCD + \angle CBD = \angle BDA$ (мы воспользовались тем, что внешний угол треугольника равен сумме двух, не смежных с ним). Значит $AB = BD$. Аналогично $\angle BFE = \angle FBA + \angle FAB = \angle EAD + \angle ECD = \angle BEF$, откуда $BF = BE$. Значит треугольники ABF и DBE равны (по двум сторонам и углу между ними). Отсюда следует, что $AF = DE$.

(Ф. Ивлев, Ф. Бахарев)

44. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Диагонали AD и BE пересекаются в точке X, диагонали AD и CF — в точке Y, а диагонали BE и CF — в точке Z. Оказалось, что $AX = DY$ и $CY = FZ$. Докажите, что $BX = EZ$.

□ Рис. 8. Заметим, что $AX \cdot XD = AY \cdot YD$ (так как $AX = YD$ и $AY = XD$). Теперь $AY \cdot YD = FY \cdot YC$ (так как произведение отрезков хорд равны). Далее $FY \cdot YC = FZ \cdot ZC = EZ \cdot ZB$. С другой стороны $AX \cdot XD = BX \cdot XE$. Используя все эти равенства, мы получаем $BX \cdot XE = BZ \cdot ZE$. Отсюда легко вытекает, что $BX = ZE$, что и требовалось доказать.

(Д. Максимов, Ф. Петров)

45. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ выполнено $AB > CD$ и $BC > AD$. На лучах AB и CD выбраны точки K и M соответственно так, что $AK =$

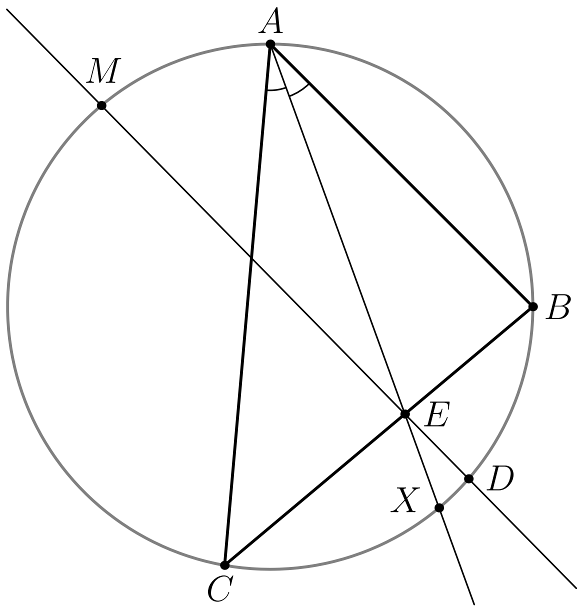

Рис. 6: к задаче 23.

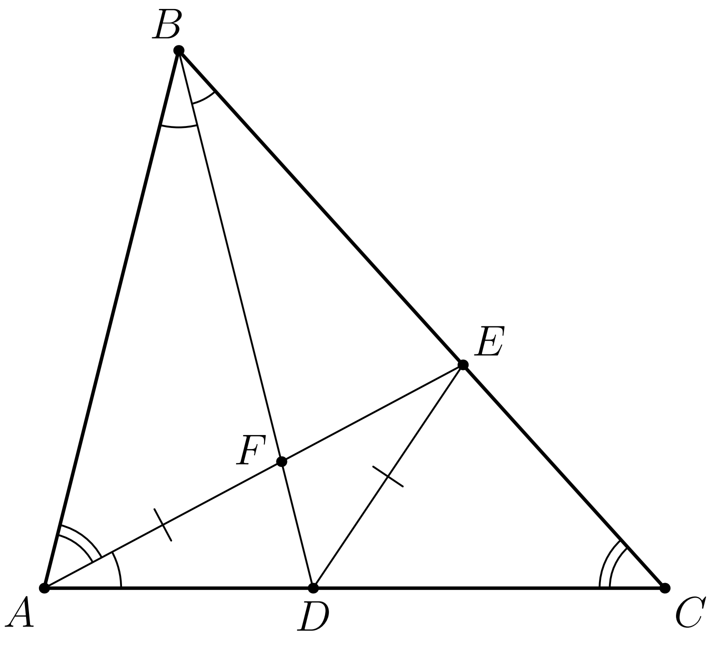

Рис. 7: к задаче 43.

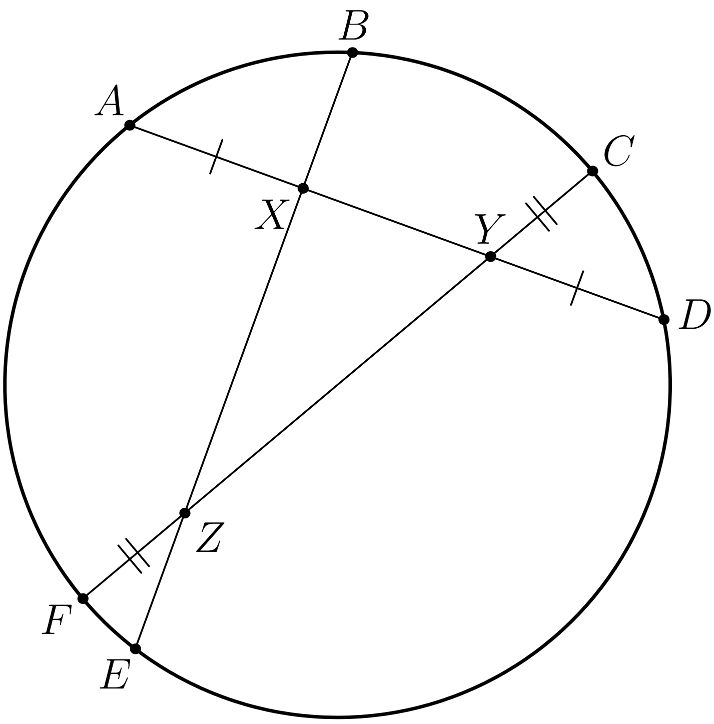

Рис. 8: к задаче 44.

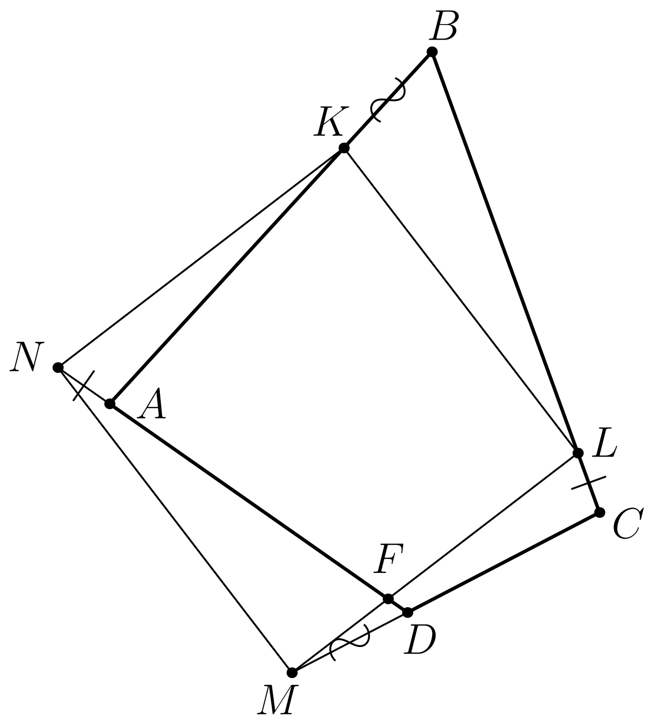

Рис. 9: к задаче 45.

$CM = \frac{1}{2}(AB + CD)$, а на лучах BC и DA — точки L и N соответственно так, что $BL = DN = \frac{1}{2}(BC + AD)$. Докажите, что $KLMN$ — прямоугольник и площадь его равна площади $ABCD$.

▫ Рис. 9. Во-первых, заметим, что в силу указанных соотношений $KB = MD$, причем точка K лежит на отрезке AB, а точка D на отрезке MC. Во-вторых, $NA = LC$ и точка L лежит на отрезке BC, и точка A лежит на отрезке ND. В треугольниках MCL и KAN верны соотношения $NA = CL$, $KA = MC$ и $\angle NAK = angleLCM$ (первый — внешний в четырехугольнике $ABCD$, а второй — противоположный внутренний). Следовательно, треугольники MCL и KAN равны и, в частности, равны NK и ML. Аналогичными рассуждениями приходим к тому, что равны треугольники KBL и MDN и отрезки $KL = MN$. Из полученных равенств отрезков заключаем, что $KLMN$ — параллелограмм. Заметим, что $\angle KLM = 180^\circ - \angle KLB - \angle MLC = 180^\circ - \angle MAD - \angle KNA = 180^\circ - \angle KNM$. Таким образом, противоположные углы параллелограмма дополняют друг друга до 180°, что возможно только если он прямоугольник. Осталось показать, что четырехугольник $ABCD$ и прямоугольник $KLMN$ равновелики. Для этого отметим F — точку пересечения отрезков ML и AD. Верна следующая цепочка равенств

$$S_{ABCD} = S_{AKLF} + S_{KBL} + S_{LCM} - S_{MFD} = \\ = S_{AKLF} + S_{MDN} + S_{MAK} - S_{MFD} = S_{KLMN}.$$

(Eisso J. Atzema, предложил В. Дубровский)

46. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC точки O и H — это соответственно центр описанной окружности и точка пересечения высот. Окружность ω_A симметрична описанной около треугольника AOH окружности относительно прямой AO. Аналогично определяются окружности ω_B и ω_C. Докажите, что окружности ω_A, ω_B и ω_C пересекаются в одной точке, лежащей на описанной окружности треугольника ABC.

▫ Рис. 10. Обозначим через X точку пересечения описанной окружности треугольника с окружностью ω_A. Через H_A и H_B обозначим точки, симметричные H относительно середин OA и OB соответственно. Под *направленным углом* между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 будем понимать угол на который надо повернуть прямую ℓ_1, чтобы она стала параллельна ℓ_2. Обозначать его будем $\angle(\ell_1, \ell_2)$. Тогда, пользуясь простейшими свойствами направленных углов, получаем $\angle(BX, OX) = \angle(BX, AX) + \angle(AX, OX)$. Далее $\angle(BX, AX) = \angle(BC, AC) = \angle(AH, BH)$, поскольку точки A, B, C, X лежат на одной окружности и угол между высотами равен углу между сторонами. Кроме того, $\angle(AX, OX) = \angle(AH_A, OH_A) = \angle(OH, AH)$, поскольку A, O, X и H_A лежат на ω_A. Следовательно, $\angle(BX, OX) = \angle(AH, BH) + \angle(OH, AH) = \angle(OH, BH) = \angle(BH_B, OH_B)$. Отсюда следует, что точка X лежит на ω_B. Аналогично проверяется, что точка X лежит на ω_C.

Другое решение. Будем считать, что описанная окружность треугольника ABC — это единичная окружность с центром в нуле на компелксной плоскости. Названия всех точек будем отождествлять с соответствующими комплексными числами. Тогда $H = A + B + C$, точка H_A симметричная H относительно середины OA вычисляется по формуле $H_A = -B - C$. Пусть X — это точка пересечения окружности ω_A и ω_B. То, что X лежит на ω_A и ω_B означает, что

$$\frac{X-O}{X-A} : \frac{-B-C-O}{-B-C-A} \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \frac{X-O}{X-B} : \frac{-A-C-O}{-C-A-B} \in \mathbb{R}.$$

Поделим одно двойное отношение на другое и получим, что

$$\frac{X-B}{X-A} : \frac{-C-B}{-C-A} \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, точки X, A, B и $-C$ лежат на одной окружности, то есть X лежит на описанной окружности треугольника ABC и отлична от A, B и C. Из этого следует утверждение задачи.

(Ф. Бахарев по мотивам Iran TST 2013)

Старшая лига

47. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что площади треугольников AOB_1 и BOA_1 равны.

□ Рис. 11. Будем использовать стандартные обозначения для сторон и углов треугольника. Заметим, что в указанных треугольниках равны стороны $OA = OB$. Расстояние от точки A_1 до OB равно $BA_1 \cdot \sin \angle CBO = BA_1 \cdot \cos \alpha = c \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha$. По той же формуле вычисляется расстояние от B_1 до AO. Следовательно, высоты в указанных треугольниках тоже равны. Значит, равны и площади.

(фольклор)

48. Даны концентрические окружности ω и γ, причем γ лежит внутри ω. На окружности ω выбрана произвольная точка O, из которой проведены касательные OA и OB к окружности γ. Окружность с центром в точке O и радиусом OA пересекает окружность ω в точках C и D. Докажите, что прямая CD содержит среднюю линию треугольника OAB.

□ Рис. 12. Окружность с центром O и радиусом OA обозначим за Ω. Достаточно проверить, что середина OA имеет одинаковые степени точки относительно окружностей ω и Ω. Тогда средняя линия треугольника AOB окажется радикальной осью этих окружностей и будет проходить через точки их пересечения. Итак, пусть точка M — середина отрезка AO, и прямая AO повторно пересекает окружность ω в точке F. Из симметрии $AF = AO = 2MO$. Значит, степень точки M относительно окружности ω равна $-OM \cdot FM = -3OM^2$. Относительно окружности Ω степень точки M вычислим как разность квадрата расстояния до центра и квадрата радиуса: $MO^2 - AO^2 = MO^2 - 4MO^2 = -3AO^2$. Что и требовалось.

(Ф. Ивлев)

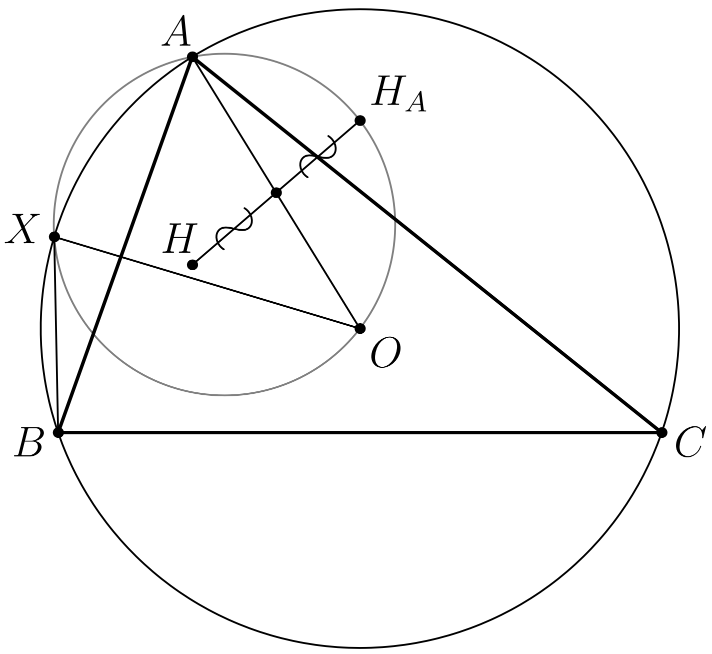

Рис. 10: к задаче 46.

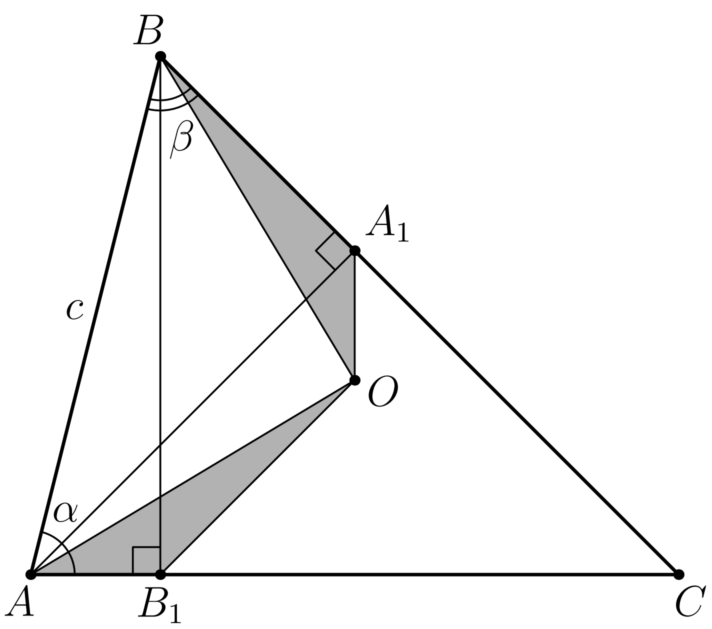

Рис. 11: к задаче 47.

49. При каких $a > 1$ существует выпуклый многогранник, отношение площадей любых двух граней которого больше a?

▫ *Ответ:* при всех $a \in (1, 2)$. Мы будем пользоваться следующей леммой. Пусть грани выпуклого многогранника имеют площади S_1, S_2, …, S_n. Тогда выполняется неравенство: $S_n \leqslant S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-1}$. (Аналог неравенства треугольника для многранника).
Доказательство леммы: спроектируем многогранник на плоскость грани с площадью S_n. Тогда проекции остальных граней, очевидно, накроют грань S_n (в силу выпуклости многогранника). Отсюда следует, что S_n не превосходит суммы площадей проекций остальных граней. Но площадь проекции каждой грани не превосходит площади самой грани (так как получается из нее домножением на косинус угла между гранями), откуда и следует требуемое неравенство.

Теперь покажем, что при $a \geqslant 2$ такого многогранника существовать не может. Пусть, площади граней этого многогранника $S_1 < S_2 < S_3 < \ldots < S_{n-1} < S_n = 1$. Тогда из условия следует, что $S_{k-1} \leqslant \frac{1}{a} S_k$, то есть $S_k \leqslant \frac{1}{a^{n-k}}$. Напишем теперь неравенство из леммы:

$$1 = S_n \leqslant S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-1} \leqslant \frac{1}{a^{n-1}} + \frac{1}{a^{n-2}} + \ldots + \frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \ldots + \frac{1}{2} < 1.$$

Полученное противоречие означает, что при $a \geqslant 2$ такого многогранника существовать не может.

Теперь построим пример такого многогранника для $a_0 < 2$. Выберем a так, что $2 > a > a_0$. Сперва заметим, что найдется такое натуральное n, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \ldots + \frac{1}{a^{n-1}} > 1$. Действительно, сумма геометрической прогресси в левой части это неравенства равна $\frac{a^{n-1}-1}{a^n - a^{n-1}}$. Условие, что последняя дробь больше 1 равносильно тому, что $2a^{n-1} > a^n + 1$. Последнее неравенство перепишем в виде $2 > a + \frac{1}{a^{n-1}}$. Отсюда уже очевидно, что при $a < 2$ мы сможем подобрать подходящее n.

Зафиксируем найденное n и построим многоугольник M со сторонами 1, $\frac{1}{a}$, …, $\frac{1}{a^{n-1}}$ (условие, которого мы добились на предыдущем шаге, означает, что это возможно). Пусть площадь этого многоугольника равна 1. Выберем внутри многоугольника M произвольную точку O. Пусть расстояния от нее до сторон равны h_0, h_1, …, h_{n-1} соответственно. Теперь выберем точку S вне плоскости построенного многоугольника, но так, что бы ее проекция попадала в точку O. По смыслу она будет расположена «далеко» от этой плоскости. Пусть расстояния от нее до плоскости равно h. Покажем, что подходящим выбором h мы сможем добиться того, чтобы пирамида с вершиной в S и основанием M будет искомой. Для этого посчитаем площадь треугольной грани: $S_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{h^2+h_k^2}}{a^k}$. Это означает, что отношение площадей соседних граней $\frac{S_k}{S_{k+1}}$ имеет вид

$$a \cdot \sqrt{\frac{h^2 + h_k^2}{h^2 + h_{k+1}^2}}.$$

Выбирая h достаточно большим, мы сможем добиться, чтобы любое такое отноешение было больше a_0. Действительно, преобразовывая неравенство

$$a \cdot \sqrt{\frac{h^2 + h_k^2}{h^2 + h_{k+1}^2}} > a_0$$

мы получаем неравенство

$$h > \sqrt{\frac{a_0^2 h_{k+1}^2 - a^2 h_k^2}{a^2 - a_0^2}}.$$

Подходящим выбором h мы добьемся выполнения всех таких неравенств для всех k. остается лишь выбрать h еще и таким, чтобы площадь $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{h^2+h_{n-1}^2}}{a^{n-1}}$ был бы больше, чем a_0 (то есть больше площади основания, умноженной на a_0). Очевидно, что этого также можно добиться.

(А. Шаповалов)

50. Пусть H, I и O — соответственно точка пересечения высот, центры вписанной и описанной окружностей остроугольного треугольника ABC. Докажите, что $\angle AIH = 90^\circ$ тогда и только тогда, когда $OI \parallel BC$.

▫ Обозначим через M середину стороны BC, через N — середину отрезка AH, через L — середину малой дуги BC описанной окружности треугольника ABC, а через K — середину большей. Докажем две вспомогательные леммы.
Лемма 1. $AN = OM$. Действительно, отразим H симметрично относительно точки M в точку H'. В силу симметрии имеем $H'B \parallel HC \perp AB$ и аналогично $H'C \parallel HB \perp AC$. Значит, H' — диаметрально противоположная точке A точка на описанной окружности треугольника ABC. Следовательно, H', O и A лежат на одной прямой и O делит AH' пополам. Значит, OM — средняя линия в треугольника AHH', а следовательно, равна половине стороны AH, то есть как раз AN.
Лемма 2. Треугольники LMI и LIN подобны. Вспомним лемму о трезубце, которая утверждает, что $LI = LB$. Выполнено $\angle LKB = \angle LBM$ ввиду равенства дуг LB и LC. Из перпендикулярности прямых LK и BC, а также того, что $\angle KBL = 90^\circ$, как опирающийся на диаметр, имеем два подобных треугольника LBM и LKB. Значит, $\frac{LI}{LM} = \frac{LB}{LM} = \frac{LK}{LB} = \frac{LK}{LI}$. Из этого равенства отношений и того, что угол KLI у треугольников MLI и KIL общий, получаем требуемое.
Из равенства $AN = OM$ и параллельности этих отрезков (ввиду перпендикулярности стороне BC) получаем, что $ANMO$ — параллелограмм, а следовательно, $OA \parallel MN$. Заметим также, что $\angle BAO = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOB) = 90^\circ - \angle ACB = \angle HAC$. Следовательно, AI — биссектриса угла OAH.
Проведем теперь цепочку равносильных переходов. $\angle BIH = 90^\circ$ тогда и только тогда, когда медиана IN в треугольнике AIH равна половине стороны AH. Это в свою очередь равносильно тому, что в треугольнике INA равны углы AIN и IAN. Так как угол IAN всегда равен углу IAO, то это равносильно тому, что равны углы AIN и IAO, что равносильно параллельности прямых

AO и NI. Вспоминая, что по доказанному $AO \parallel MN$ получаем равносильность условию того, что точка I лежит на прямой MN. Другими словами это равносильно тому, что $MI \parallel OA$. Ввиду того, что точки M и I лежат на сторонах треугольника AOL, получаем, что последнее условие параллельности равносильно подобию треугольников AOL и MIL. Но треугольник AOL всегда равнобедренный, так что это условие равносильно тому, что треугольник LMI равнобедренный. Но этот треугольник по лемме 2 подобен треугольнику LIK, что означает, что изначальное условие равносильно условию равнобедренности треугольника LIK. В свою очередь это равносильно тому, что медиана OI этого треугольника совпадает с высотой. Иными словами, это равносильно тому, что $OI \perp KL$. Последнее очевидно равносильно условию $BC \parallel OI$, что и требовалось.

(Ф. Ивлев, решила Ю. Зайцева)

Командная олимпиада

Младшая лига

51. (3) В семье, кроме папы и мамы, двое детей. Все зовут друг друга по имени. Принято, обращаясь к своему ребенку или своему родителю, перечислять всех упомянутых от младшего к старшему, а в разговорах между детьми или между родителями — наоборот. Лёша сказал Свете: «Мы идем в театр: Настя, я и Володя». Как зовут папу и маму?

▫ *Ответ:* Володя и Света. Допустим, папа — Лёша. Тогда Володя младше, значит, Лёша перечислял от старшего к младшему. Поэтому Настя старше Лёши, значит, Настя — мама. Но перечислять от старшего к младшему Лёша мог только обращаясь к маме. Противоречие. Значит, Лёша — сын, а папа — Володя. Тогда Лёша перечислял от младшего к старшему, значит, обращался к маме. Итак, мама — Света.

(А. Шаповалов)

52. (4) Перед началом шахматного турнира участники были занумерованы. Каждый с каждым сыграл по разу. Во всех партиях, которые не закончились вничью, у победителя номер был меньше, чем у побеждённого. Петя победил Васю, но набрал по результатам турнира меньше очков, чем Вася. Каково наименьшее возможное число участников турнира? (Давали 1 очко за победу, 0.5 за ничью, 0 за поражение.)

▫ *Ответ:* 5 участников. *Оценка.* Пусть x человек победили Петю, Вася победил y человек. У этих x номера меньше, чем у Пети, и тем более, меньше, чем у Васи. А у этих y человек номера больше, чем у Васи. Значит, все эти люди различны. Число очков у игрока тем больше, чем больше у него разность между числом побед и числом поражений. У Пети разность $a \geqslant 1 - x$, у Васи разность $b \leqslant y - 1$, и по условию $a < b$. Значит, $1 - x < y - 1$, откуда $x + y > 2$. А всего у нас не меньше $x + y + 2 > 4$ игроков, то есть, не менее

5. *Пример на 5:* Петя победил Васю, Вася победил троих других, а остальные партии закончились вничью. Тогда Петя набрал 2.5 очка, Вася набрал 3 очка — больше, чем у Пети.

(А. Шаповалов)

53. (5) Натуральные числа m и $n > 1$ таковы, что $4^m - 1$ делится на n, а $n-1$ делится на 2^m. Докажите, что $n = 2^m + 1$.

▫ Пусть $n - 1 = a2^m$. Тогда $4^m - 1 = bn = b(a2^m + 1) = ab2^m + b$. Ясно, что $b < 2^m$, но с другой стороны из последнего равенства видим, что b сравнимо с -1 по модулю 2^m. Это означает $b = 2^m - 1$, откуда и получаем, что $n = 2^m + 1$.

(Indonesia NO 2012)

54. (6) Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. На продолжении стороны AB за точку B отмечена точка D такая, что $\angle DCB = \angle BCA$. На высоте BH треугольника ABC отмечена точка E такая, что $DE = DC$. Докажите, что $\angle BDE = \frac{1}{3}\angle BDC$.

▫ Рис. 13. Отметим точку D' симметричную точке D относительно прямой BH. Мы получим равнобочную трапецию $AD'DC$, в которой, по условию, диагональ CD' является биссектрисой угла DCA. В силу параллельности оснований трапеции имеем $\angle DD'C = \angle D'CA = \angle D'CD$, откуда $D'D = DC$. Теперь продлим ось симметрии трапеции BH до пересечения с DD' в точке F. Тогда $FD = \frac{1}{2}DD' = \frac{1}{2}DE$, откуда мы получаем, что $\angle FED = 30^\circ$, так как в треугольнике FED катет оказался равен половине гипотенузы. Тепеь осталось просто аккуратно посчитать углы. Для этого введем обозначения: $\angle BCD = x$ и $\angle BDE = y$. Тогда мы получили, что $90^\circ + x + y + 30^\circ = 180^\circ$ (сумма углов треугольника EBD.) Отсюда мы имеем, что $x + y = 60^\circ$ или $3x + 3y = 180^\circ$. Теперь рассмотрим треугольник DBC: в нем $\angle BCD = x$ и $\angle DBC = 2x$ (как внешний угол треугольника ABC), а следовательно, $\angle BDC = 3y$ (из суммы углов треугольника BDC). Мы получили то, что требовалось.

(Georgia TST 2005)

55. (6) В треугольнике ABC выбрана точка P такая, что $\angle ABP = \angle CPM$, где M — середина стороны AC. Прямая MP повторно пересекает описанную окружность треугольника APB в точке Q. Докажите, что $QA = PC$.

▫ Рис. 14. Заметим, что $\angle AQP = \angle ABP$ (так как опираются на одну дугу AP), откуда $\angle AQP = \angle CPM$. Теперь продлим медиану PM треугольника APC до точки P' такой, что $MP = MP'$. Мы получим параллелограмм $APCP'$, в котором $\angle CPP' = \angle AP'P$. Значит, мы получили равнобедренный треугольник AQP' и значит $QA = AP' = PC$, что и требовалось.

56. (7) Дана последовательность натуральных чисел u_0, u_1, ..., причем $u_0 = 1$. Оказалось, что существует натуральное k такое, что равенство $u_{n+1}u_{n-1} = ku_n$ верно при всех натуральных n. Известно также, что $u_{2013} = 100$. Найдите k.

▫ *Ответ:* $k = 10$. Обозначим u_1 через a. Простыми вычислениями убеждаемся,что $u_2 = ka$, $u_3 = k^2$, $u_4 = k^2/a$, $u_5 = k/a$, $u_6 = 1$, $u_7 = a$, то есть данная

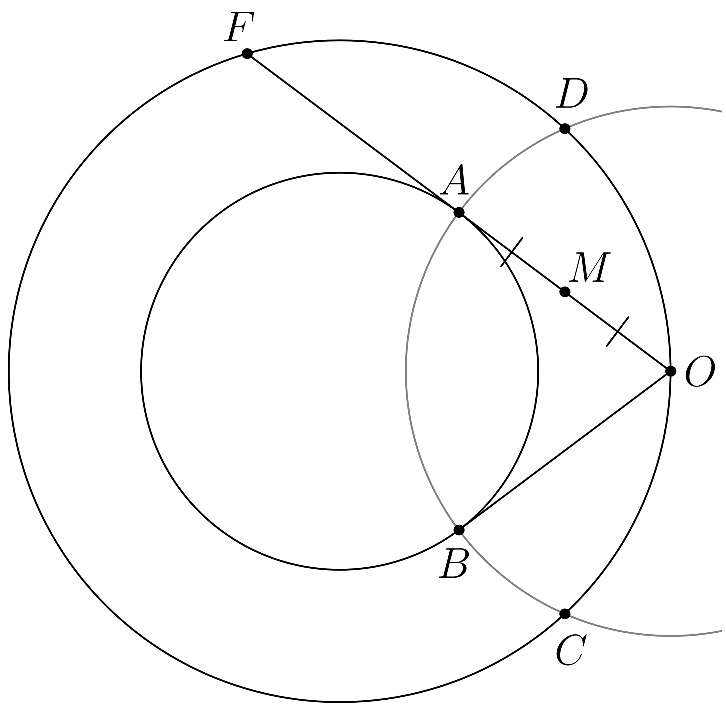

Рис. 12: к задаче 48.

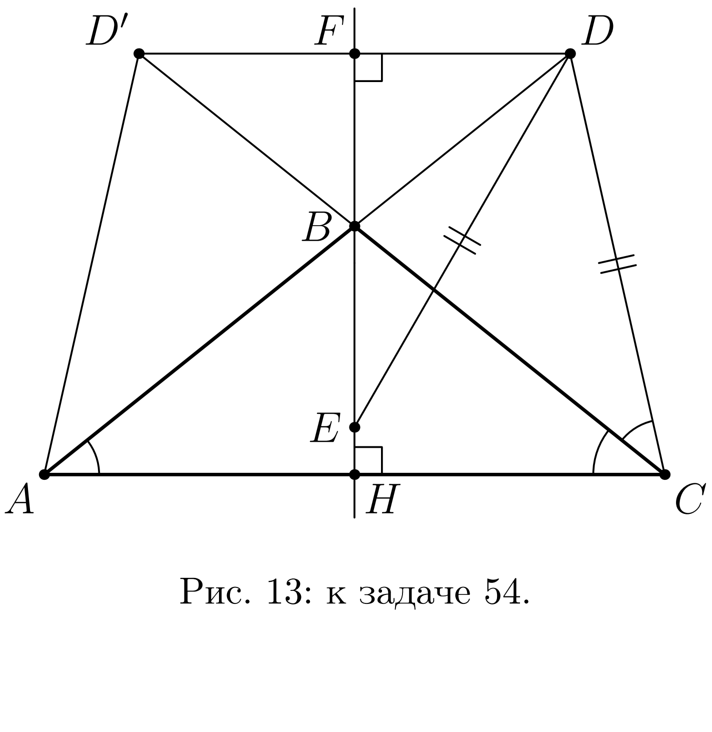

Рис. 13: к задаче 54.

нам последовательность периодична с периодом 6. Значит, $u_{2013} = u_3 = k^2$, откуда $k = 10$.

(British Olympiad 1995)

57. (8) Три бегуна тренируются на одной прямой дорожке. Их скорости различны, но постоянны. Добежав до конца дорожки, бегун мгновенно разворачивается и бежит обратно, затем разворачивается на другом конце, и т. д. Пять раз случалось, что все бегуны оказывались в одной точке. Докажите, что такие встречи всех троих будут продолжаться и впредь.

▫ Пусть длина дорожки равна 0.5. Пусть бегун находится на расстоянии s от начала дорожки. Его координатой назовем s когда он бежит от начала и $1 - s$ когда он бежит к началу. При встрече двоих сумма их координат равна 1, при обгоне координаты равны. Если бегун стартовал из точки b и бежит со скоростью v, то в момент времени t его координата равна $[b + vt]$. Пометим точки старта и скорости бегунов 1, 2, 3 соответственными индексами. Тогда встреча 1-го и 2-го бегунов происходит когда сумма $v_1t + b_1 + v_2t + b_2$ — целая, а обгоны одного из них другим — когда разность $v_1t + b_1 - (v_2t + b_2)$ целая. Аналогично для 1-го и 3-го. Парные совпадения положений бывают двух типов — встречи (лицом к лицу) или обгоны. Соответственно, тройные совпадения бывают четырех типов: первый встречает обоих, встречает 2-го и обгоняет 3-го, встречает 3-го и обгоняет 2-го, обгоняет обоих. Ясно, что какой то тип тройного совпадения произойдет дважды, скажем, в моменты t и T $(T > t)$. Рассмотрим для определенности случай, когда 1-й и 2-й при этом встретились, а у 1-го и 3-го был обгон. Тогда $v_1t+b_1+v_2t+b_2$, $v_1T+b_1+v_2T+b_2$, $v_1t + b_1 - (v_3t + b_3)$ и $v_1T + b_1 - (v_3T + b_3)$ — целые. Покажем, что тогда и в момент $2T - t = T + (T - t)$ было тройное совпадение. Действительно, $v_1(2T - t) + b_1 + v_2(2T - t) + b_2 = 2(v_1T + b_1 + v_2T + b_2) - (v_1t + b_1 + v_2t + b_2)$ — целое и $v_1(2T - t) + b_1 - (v_3(2T - t) + b_3) = 2(v_1T + b_1 - (v_3T + b_3)) - (v_1t + b_1 - (v_3t + b_3))$ — целое. Положение первого совпало с обоими другими, значит призошло тройное совпадение того же типа.

(А. Шаповалов)

58. (10) Положительные числа x, y и z таковы, что $x + y + z = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{xy}{\sqrt{z+xy}} + \frac{yz}{\sqrt{x+yz}} + \frac{zx}{\sqrt{y+zx}} \leqslant \frac{1}{2}.$$

▫ Заметим, что $(z + x)(z + y) = z^2 + xz + yz + xy = z(x + y + z) + xy = z + xy$. Значит, для первого слагаемого мы имеем:

$$\frac{xy}{\sqrt{z+xy}} = \frac{xy}{\sqrt{(z+x)(z+y)}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{xy}{z+x} + \frac{xy}{z+y}\right).$$

суммируя все такие неравенства мы получаем требуемое.

(Д. Максимов)

59. (11) Можно ли раскрасить точки плоскости в 2013 цветов (то есть сопоставить каждой точке плоскости натуральное число от 1 до 2013) так, чтобы на любой прямой и на любой окружности (ненулевого радиуса) встречались бы точки всех цветов?

□ *Ответ:* можно. Сперва покажем, как покрасить в 2013 цветов точки прямой так, чтобы на любом отрезке были точки всех 2013 цветов. Для этого, например, пронумеруем простые числа p_k, и несократимые дроби вида $\frac{a}{p_k}$ покрасим в цвет, ранвый остатку k по модулю 2013. Остальные точки (в частности, все иррациональные) покрасим как угодно. Для любого отрезка, на нем существуют точки вида $\frac{a}{p}$ (a и p взаимно просты) при достаточно больших p, что и требуется. Теперь введем на плоскости систему координат и покрасим параболу вида $y = x^2 + a$ в цвет точки a. Заметим, что все горизонтальные и вертикальные прямые пересекают все такие параболы. Рассмотрим прямые вида $y = kx + b$. Параболы, которые пересекают такие прямые, это параболы с таким a, что уравнение $x^2 - kx - b = -a$ имеет решение. Это верно для чисел a из некоторого луча, то есть на таких прямых есть точки любого цвета. Теперь рассмотрим произвольную окружность. Выберем внутри нее произвольный вертикальный отрезок и заметим, что парабола, пересекающая выбранный вертикальный отрезок обязательно пересекает и окружность. Несложно понять, что множество a таких, что парабола $y = x^2 + a$ пересекает некоторый вертикальный отрезок — это тоже отрезок, причем такой же длины. Отсюда ясно, что среди таких парабол встретятся параболы всех цветов.

(Жюри)

Старшая лига

60. (3) Две медианы разбивают треугольник на четырехугольник и три равнобедренных треугольника. Докажите, что исходный треугольник тоже равнобедренный.

□ Пусть медианы AK и BL треугольника ABC пересекаются в точке M. Если $AM = MB$, все очевидно. Если нет, то можно считать, что $AM = AB$. Но тогда угол AMB — острый, поэтому углы AML и BMK — тупые, а отсюда в равнобедренных треугольниках AML и BMK равны стороны $AM = ML$ и $BM = MK$. Однако, ведь $BM = 2ML$, $AM = 2MK$, откуда $BM = 2ML = 2AM = 4MK = 4BM$ — противоречие.

(А. Шаповалов)

61. (4) Существуют ли 2013 ненулевых вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2013}$ таких, что для бесконечно многих натуральных n верно равенство $x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{2013}^n = 0$?

□ *Ответ:* нет. Пусть $|x_1| \geqslant |x_2| \geqslant \ldots \geqslant |x_{2013}|$. Если $|x_1| > |x_2|$, то начиная с некоторого натурального n будет верно неравенство $|x_1|^n > 2012|x_2|^n \geqslant |x_2|^n + |x_3|^n + \ldots + |x_{2013}|^n$ и это означает, что сумма n-ых степеней не может быть нулем. Значит $|x_1| = |x_2|$. Теперь заметим, что среди чисел, равных по модулю x_1 должно быть поровну положительных и отрицательных, иначе аналогично убеждаемся, что начиная с некоторого n сумма не может быть нулем. Отбрасывая числа с максимальным модулем (которых, как мы поняли, четное число), мы продолжим аналогичные рассуждения. Таким образом, будет доказано, что чисел обязательно четное число, то есть их не может быть 2013.

(А. Устинов)

62. (4) Есть куб со стороной 1 м и набор из пяти красок. Сначала Петя режет куб на равные меньшие кубики размера не более 1 см (размер он выбирает сам). Затем Вася красит кубики как хочет (не обязательно все одинаково), но так, чтобы каждая грань была одноцветна. Наконец, Петя складывает куб, используя все кубики. Докажите, что независимо от действий Васи Петя может добиться того, чтобы каждая грань большого куба была одноцветной.

□ Пусть k — число способов раскрасить кубик данным набором красок. Разрежем куб на n^3 кубиков, где $n > 6k$ и достаточно велико, чтобы ребра частей были короче 1 см. Расставим кубики так, чтобы они переводились друг в друга параллельным переносом. Тогда найдется не менее $\frac{n^3}{k}$ одинаково раскрашенных кубиков. Это больше чем $6n^2$, что больше числа кубиков, примыкавших к граням исходного куба. Будем строить большой куб с такой же раскраской, как у этих кубиков. Поместим эти одинаково окрашенные кубики на границу. При этом кубики, примыкающие к боковым граням, получаются друг из друга параллельным переносом, поэтому боковые грани будут одноцветны.

(А. Шаповалов)

63. (5) Пусть $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — неубывающая *мультипликативная функция* (т. е. для любых взаимно простых натуральных m и n верно равенство $f(mn) = f(m)f(n)$). Докажите, что

$$f(8)f(13) \geqslant (f(10))^2.$$

□ Домножим обе части неравенства на $f(7)^2$. Будем иметь:

$$f(8)f(7)f(13)f(7) = f(56)f(91) \geqslant f(55)f(91) = f(5005) \geqslant$$
$$\geqslant f(4970) = f(70)f(71) \geqslant f(70)f(70) = (f(10))^2(f(7))^2.$$

(фольклор)

64. (5) Три бегуна тренируются на одной прямой дорожке. Их скорости различны, но постоянны. Добежав до конца дорожки, бегун мгновенно разворачивается и бежит обратно, затем разворачивается на другом конце, и т. д. Пять раз случалось, что все бегуны оказывались в одной точке. Докажите, что такие встречи всех троих будут продолжаться и впредь.

□ См. решение задачи 57.

(А. Шаповалов)

65. (6) Пусть $p > 3$ — простое число. Докажите, что следующая сумма делится на p:

$$\left(\sum_{2\leqslant i<j<k\leqslant p-1} ijk\right) + 1.$$

□ Рассмотрим многочлен $P(x) = (x-2)(x-3)\dots(x-(p-1))$. Заметим, что сумма $\sum_{2\leqslant i<j<k\leqslant p-1} ijk$ противопложна по знаку коэффициенту при мономе x^{p-5} этого многочлена. Таким образом, нам осталось посчитать многочлен $P(x)$ по модулю p. Заметим, что $(x-1)P(x)$ по модулю p — это просто $x^{p-1}-1$ в силу малой теоремы Ферма. Отсюда следует, что по модулю p многочлен $P(x)$ равен $\frac{x^{p-1}-1}{x-1} = x^{p-2}+x^{p-3}+\ldots+x+1$. Это и означает, что коэффицент перед x^{p-5} по модулю p равен 1, что нам и требовалось доказать.

(Indonesia NO 2013)

66. (6) На сторонах AB, BC, CD и DA ромба $ABCD$ соответственно выбраны точки E, F, G и H таким образом, что отрезки EF и GH касаются вписанной в ромб окружности. Докажите, что прямые EH и FG параллельны.

□ Рис. 15. Обозначим через K, L, M и N точки касания вписанной окружности со сторонами ромба AB, BC, CD и DA соответственно. Так как $ABCD$ ромб отрезки KM и NL — диаметры вписанной окружности. Через X обозначим точку касания EF со вписанной окружностью, а через Y — точку касания GH. Пусть лучи XK и YN пересекаются в точке P, а лучи XL и YM — в точке Q. Точка E — поляра прямой KX, точка H — поляра прямой NY, откуда мы получаем, что точка P — поляра прямой EH. Аналогично, точка Q — поляра прямой FG. Значит, досточно доказать, что центр окружности лежит на прямой PQ (потому что из этого будет следовать, что обе данные прямые перпендикулярны прямой PQ). Последнее утверждение будет следовать из теоремы Паскаля для шестиугольника $KMYNLXK$.

(Georgia TST 2005)

67. (8) Дан граф, степени всех вершин которого не превосходят 7. Оказалось, что его вершины нельзя покрасить правильным образом в 6 цветов. Докажите, что в нем есть три попарно соединенные вершины.

□ Разобьем вершины на две группы так, чтобы сумма ребер внутри обеих групп была минимальной. Заметим, что максимальная степень внутри группы не больше 3-х, иначе перекинем эту вершину в другую группу, и тогда количество ребер внутри групп уменьшится.

Так как граф не красится в 6 цветов, то индуцированный граф на одну из групп не красится в 3 цвета. Рассмотрим эту группу, в ней максимальная степень 3, а следовательно, по теореме Брукса в ней есть 4 попарно соединенные вершины.

План доказательства без теоремы Брукса: Осталось доказать, что в графе с максимальной степенью три, который не красится в три цвета, есть треугольник. Пусть не так, рассмотрим минимальный контрпример, очевидно, в нем все степени ровно 3.

Так как граф не красится в три цвета, то и в два тоже. Значит, в нем есть нечетный цикл, выбирем из них самый короткий. Пусть это $a_1 \cdots a_n$. Ясно, что в нем нет диагоналей, иначе он был бы не самый короткий. Пусть вершина a_i помимо вершин a_{i-1} и a_{i+1} связана с вершиной b_i. Удалим все вершины

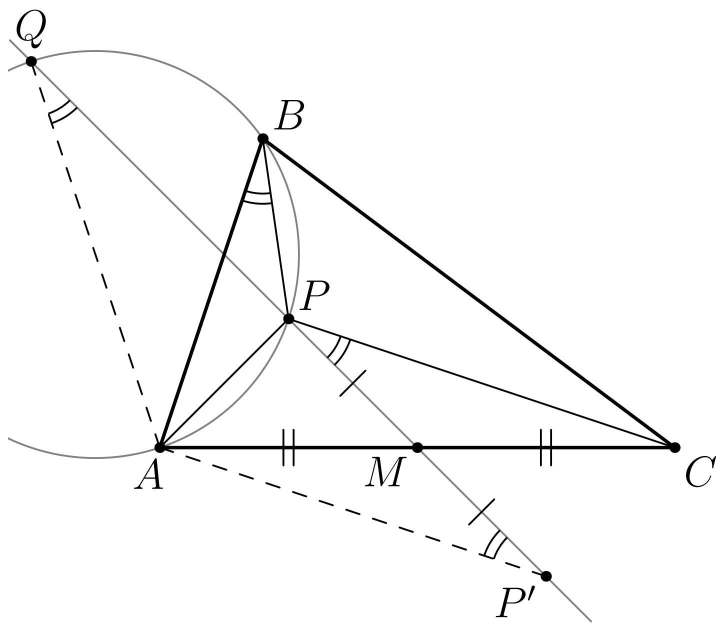

Рис. 14: к задаче 55.

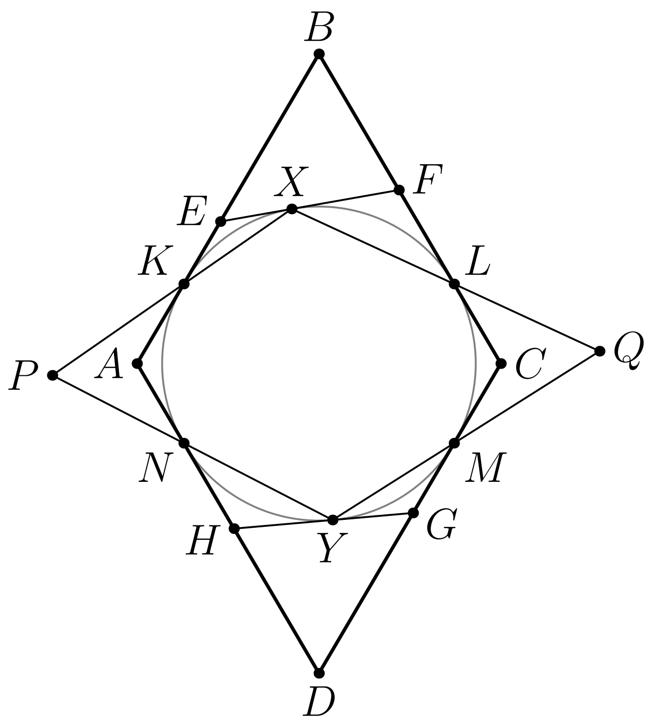

Рис. 15: к задаче 66.

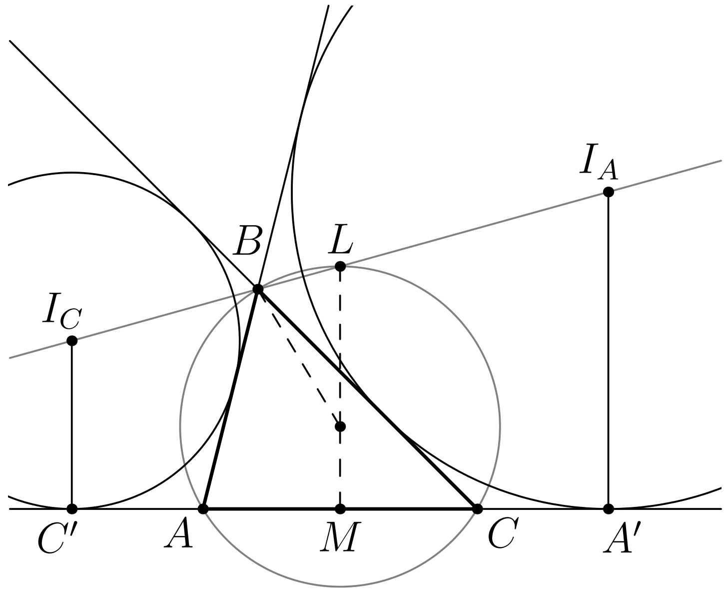

Рис. 16: к задаче 68.

цикла, тогда граф красится в три цвета, и мы попробуем его докрасить. Если есть две вершины b_i различного цвета, то несложно покрасить цикл $a_1 \cdots a_n$.

Значит, все b_i одного цвета. Если какие-то две b_i совпадают, то мы можем перекрасить эту вершину (так как после удаление всех a_j у нее осталась степень не больше 1). Значит, они все различные, причем их степени не более 2-х, поэтому попробуем добавить ребро b_ib_j так, чтобы не появился треугольник. Если у нас получится, то существует раскраска с различными цветами b_i, а далее мы сможем докрасить цикл $a_1 \cdots a_n$. То есть при добавлении любого ребра b_ib_j появляется треугольник, но это невозможно, так как $n > 4$ (доказывается исследованием соседей b_i).

(Г. Ненашев)

68. (9) Докажите, что в остроугольном треугольнике сумма длин медиан не превосходит суммы радиусов вневписанных окружностей.

▫ Рис. 16. Обозначим вершины исходного треугольника через A, B, C. Пусть M — середина стороны AC, а I_A и I_C — соответственно центры вневписанных в углы A и C окружностей. Обозначим также через A' и C' соответственно точки касания вневписанных в углы A и C окружностей с продолжением стороны AC, а через L — середину большей дуги AC описанной окружности треугольника ABC. Известно, что $AA' = CC' = p$, где p — полупериметр треугольника ABC. Значит, $MA' = AA' - MA = CC' - MC = MC'$. Так как L — середина дуги AC, то $LA = LC$, а следовательно, LM — медиана и высота, т. е. $LM \perp AC$. Так как A' и C' — точки касания, то и $I_AA' \perp AC \perp I_CC'$. Следовательно, $A'I_AI_CC'$ — трапеция. Вспоминая, что I_AI_C — внешняя биссектриса треугольника ABC, замечаем, что I_AI_C проходит через L, а следовательно, ML — средняя линия найденной трапеции. Ввиду того, что треугольник ABC остроугольный, его центр описанной окружности O будет лежать на отрезке ML. Тогда $\frac{1}{2}(I_AA' + I_CC') = ML = MO + OL = MO + OA \geqslant MA$. Складывая три таких неравенства, получаем требуемое.

(Ф. Ивлев)

69. (10) Для натуральных чисел a_1, a_2, …, a_r, больших 1, через $[a_1, a_2, \ldots, a_r]$ обозначим выражение

$$\cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{a_r}}}}.$$

Даны две конечные последовательности a_1, a_2, …, a_n и b_1, b_1, …, b_m натуральных чисел, больших 1, такие, что

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] + [b_1, b_2, \ldots, b_m] \geqslant 1.$$

Докажите, что найдутся индексы n_1 и m_1 ($1 \leqslant n_1 \leqslant n$ и $1 \leqslant m_1 \leqslant m$) такие, что

$$[a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}] + [b_1, b_2, \ldots, b_{m_1}] = 1.$$

□ Будем доказывать индукцией по $m+n$. *База.* Пусть $m = 1$, $n = 1$. Получаем $a_1^{-1} + b_1^{-1} \geqslant 1$, причем $a_1, b_1 \geqslant 2$. Следовательно, $a_1 = b_1 = 2$, и $n_1 = n = m_1 = m = 1$.

Переход. Если в неравенстве

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] + [b_1, b_2, \ldots, b_m] \geqslant 1 \tag{4}$$

достигается равенство, то возьмем $n_1 = n$ и $m_1 = m$. Пусть далее это неравенство строгое. Заметим, что

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] < \frac{1}{a_1 - 1}.$$

Тогда из (4) получаем, что $\frac{1}{a_1-1} + \frac{1}{b_1-1} > 1$, откуда следует, что хотя бы одно из чисел a_1, b_1 равно 2. Без ограничения общности считаем $a_1 = 2$. Если при этом $b_1 = 2$, то можно взять $n_1 = m_1 = 1$. Пусть далее $b_1 > 2$. Если $n = 1$, то $[a_1] = [2] = \frac{1}{2}$, а $[b_1, b_2, \ldots, b_m] < \frac{1}{b_1-1} = 1/2$, и такие числа в сумме не превосходят 1. Противоречие со строгостью неравенства (4) — следовательно, далее считаем $n > 1$. В этом случае

$$[2, a_2, \ldots, a_{n_1}] + [b_1, b_2, \ldots, b_{m_1}] = 1 \tag{5}$$

эквивалентно

$$[a_2, \ldots, a_{n_1}] + [b_1 - 1, b_2, \ldots, b_{m_1}] = 1. \tag{6}$$

Действительно, пусть $[a_2, \ldots, a_{n_1}] = \alpha$ и $[b_2, \ldots, b_{m_1}] = \beta$ (для $m_1 = 1$ можно считать $\beta = 0$). Тогда первое из равенств переписывается как $\frac{1}{2-\alpha} + \frac{1}{b_1-\beta} = 1$, а второе как $\alpha + \frac{1}{b_1-1-\beta} = 1$. Домножением на знаменатель и приведением подобных слагаемых несложно убедится, что это одно и то же условие. Следовательно, задача о нахождении n_1 и m_1 в выражении (5) сведена к такой же задаче для (6). Последнее возможно по предположению индукции, так как n уменьшилось на 1.

(А. Устинов)