Сентябрьская интернет-олимпиада

Письменный тур

14–22 сентября 2013 г.

1. Даны три палочки различной длины. Разрешается разрезать любые из них на несколько частей. Докажите, что всегда можно сделать разрезы так, чтобы из всех полученных палочек складывался многоугольник с равными углами. (Каждая палочка должна быть целой стороной многоугольника).

2. Все натуральные числа, большие 2013, покрашены в n цветов. Известно, что цвет суммы зависит только от цветов слагаемых (например, синее плюс красное всегда зеленое, или желтое плюс белое всегда белое). Докажите, что и цвет произведения однозначно определяется цветами сомножителей.

3. Докажите, что если при всех целых x число $ax^2 + bx + c$ является точной четвертой степенью натурального числа, то $a = b = 0$.

4. На клетчатой доске $n \times n$ выделены поля большой диагонали из верхнего левого угла в правый нижний. За одну операцию разрешается выбрать любую клетку на диагонали, поставить по шашке на все пустые клетки слева от нее и снять все шашки с клеток под ней. Какое количество различных расположений шашек можно получить такими операциями из пустой доски?

5. Пусть J — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC в точке A_1 и продолжений сторон CA и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Известно, что A_1B_1 и AB перпендикулярны и пересекаются в точке D. Пусть E — основание перпендикуляра, проведенного из C_1 к прямой DJ. Найдите углы $\angle BEA_1$ и $\angle AEB_1$.

6. Для положительных a_1, a_2, $\ldots$, a_n докажите неравенство

$$\sum_{i<j} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \leqslant \frac{n}{2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)} \sum_{i<j} a_i a_j.$$