# Сентябрьская олимпиада 2013 — тестовый тур

**1.** Маша и Полина выходят из магазина, а навстречу им из дома выходят Вова и Сережа. Полина идет вдвое медленнее Маши, Маша — вдвое медленнее Сережи, Сережа — втрое медленнее Вовы. Во сколько раз ближе к магазину Вова встретит Машу нежели Сережа встретит Полину?

РЕШЕНИЕ.

Ответ: 1,4.

Обозначим скорость Полины за $x$. Тогда скорость Маши — $2x$, скорость Сережи — $4x$, скорость Вовы — $12x$. Если $s$ — расстояние от дома до магазина, то время до встречи Вовы и Маши равно $s/14x$, а время до встречи Сережи и Полины — $s/5x$. Значит, в момент встречи с Вовой Маша будет на расстоянии $s/7$ от магазина, а в момент встречи с Сережей Полина будет на расстоянии $s/5$ от магазина. ■

**2.** Точка $B$ лежит на отрезке $AC$. По одну сторону от прямой $AC$ построены равносторонние треугольники $ABE$ и $BCF$. Во сколько раз медиана треугольника $BEF$, проведенная из вершины $B$, меньше суммы $CE + AF$?

РЕШЕНИЕ.

Ответ: в четыре раза.

Достроим $EBF$ до параллелограмма $EBFM$. Диагональ $BM$ в два раза длиннее медианы треугольника $EBF$ из вершины $B$. С другой стороны, треугольники $MEB$, $EBC$, $ABF$ попарно равны, поэтому сумма $CE + AF$ в два раза длиннее отрезка $BM$. ■

**3.** Даны пять вещественных чисел: коэффициенты квадратного трёхчлена и его корни. Известно, что произведение всех пяти чисел положительно. Сколько из них могут быть положительны? Укажите наименьшее возможное число.

РЕШЕНИЕ.

Ответ: положительных может быть только 3 коэффициента.

Докажем, что не может быть 5 или 1 положительных, и приведем пример, в котором 3 положительных. Пусть $a, b, c$ — коэффициенты трехчлена, $x, y$ — его корни.

**Почему не 5.** Если $a$, $b$, $c$, $x$ — соответственно коэффициенты и корень квадратного трехчлена, то $ax^2 + bx + c = 0$. Отсюда следует, что не все числа $a$, $b$, $c$, $x$ положительны.

**Почему не 1.** Поскольку $xy = a/c$, $a, c, x, y < 0$, а $b > 0$. Но тогда $0 > x + y = -b/a > 0$. Противоречие.

**Почему 3.** Многочлен $(x+1)(x+2)$ является искомым примером. ■

**4.** Есть 2013 палочек длин 1, 2, 3, ..., 2013. Набор из трех различных палочек назовем хорошим, если из них можно сложить треугольник. На сколько отличается количество хороших наборов от количества не хороших? (Из трех палочек можно сложить треугольник, если сумма длин двух коротких больше длинной палочки. Порядок палочек в наборе не важен.)

РЕШЕНИЕ.

Ответ: нехороших наборов больше на 1012036.

Сопоставим набору $a < b < c$ набор $c - b < c - a < c$. Тогда каждому хорошему будет соответствовать свой не хороший. Но еще есть не хорошие, где $a + b = c$, назовем их *никакими*. Их количество и составляет разность между количеством хороших и количеством плохих. Запишем количество никаких наборов для каждого $c$:

| $c$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... | 2011 | 2012 | 2013 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| количество наборов | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | ... | 1005 | 1005 | 1006 |

.

Осталось посчитать сумму $2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 1005) + 1006$. ■

**5.** Натуральные $x, y, z$ удовлетворяют уравнению $7^x = 2^y 3^z + 1$. Найдите наибольшее возможное значение $x + y + z$.

РЕШЕНИЕ.

Ответ: единственные возможные наборы — $x = y = z = 1$ и $x = 2$, $y = 4$, $z = 1$.

В нашем решении мы рассмотрим три случая: **1)** $y \geqslant 2$, **2)** $z \geqslant 2$, **3)** $y = z = 1$.

**1)** $y \geqslant 2$. Правая сторона дает остаток $1 \pmod 4$, поэтому $x$ четное, $x = 2a$. Перенесем 1 и разложим на множители $(7^a - 1)(7^a + 1) = 2^x 3^y$. НОД чисел $7^a - 1$ и $7^a + 1$ равен 2, поэтому $7^a - 1 = 2 \cdot 3^z$, $7^a + 1 = 2^{y-1}$. Вычитая одно равенство из другого, получаем $3^z + 1 = 2^{y-2}$. Так как $3^z$ дает при делении на 8 остаток 2 или 4, то $y = 3$ (и тогда $z = 0$) либо $y = 4$ (и тогда $z = 1$).

**2)** $z \geqslant 2$. Правая сторона дает остаток 1 при делении на 9, поэтому $x$ должно делиться на 3, $x = 3a$. Перенесем 1 и разложим на множители $(7^3 - 1)(7^{3(a-1)} + 7^{3(a-2)} + \ldots + 1) = 2^y 3^z$. Это равенство невозможно, т. к. $7^3 - 1 = 2 \cdot 3^2 \cdot 19$.

**3)** $y = z = 1$. Тут все ясно, $x = 1$. ■