Разрешимость алгебраических уравнений.

1. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ десятой степени, старшие коэффициенты которых равны 1. Известно, что уравнение $P(x) = Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x+1) = Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

2. Существует ли функция, график которой на координатной плоскости имеет общую точку с любой прямой?

3. Даны многочлен $P(x)$ и такие числа $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, что $a_1a_2a_3 \neq 0$. Оказалось, что $P(a_1x+b_1) + P(a_2x+b_2) = P(a_3x+b_3)$ для любого действительного $x$. Докажите, что $P(x)$ имеет хотя бы один действительный корень.

4. На доске написано: $x^3 + ..x^2 + ..x + .. = 0$. Два школьника по очереди вписывают вместо многоточий действительные числа. Цель первого – получить уравнение, имеющее ровно один действительный корень. Сможет ли второй ему помешать?

5. Коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ удовлетворяют условию $2a + 3b + 6c = 0$. Докажите, что это уравнение имеет корень на интервале $(0, 1)$.

6. Решите уравнение $x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$.

7. Докажите, что любое кубическое уравнение $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ можно линейной заменой $z = x + \beta$ привести к виду $x^3 + px + q = 0$.

8. Какими должны быть числа $a$ и $b$, чтобы выполнялось равенство $x^3 + px + q = x^3 - a^3 - b^3 - 3abx$?

9. Выразите через $a$ и $b$ вещественный корень уравнения $x^3 - a^3 - b^3 - 3abx = 0$.

10. Докажите формулу Кардано для корня уравнения третьей степени $x^3 + px + q$:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

11. Решите уравнения $x^2 + x - 2 = 0$ и $x^2 + 3x - 4 = 0$ подбором и по формуле Кардано. Сравните результаты.

12. Решите уравнение $\sqrt{1 - x^2} = 4x^3 - 3x$.

13. Сколько корней на отрезке $[0, 1]$ имеет уравнение $8x(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$?

Разрешимость алгебраических уравнений.

1. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ десятой степени, старшие коэффициенты которых равны 1. Известно, что уравнение $P(x) = Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x+1) = Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

2. Существует ли функция, график которой на координатной плоскости имеет общую точку с любой прямой?

3. Даны многочлен $P(x)$ и такие числа $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, что $a_1a_2a_3 \neq 0$. Оказалось, что $P(a_1x + b_1) + P(a_2x + b_2) = P(a_3x + b_3)$ для любого действительного $x$. Докажите, что $P(x)$ имеет хотя бы один действительный корень.

4. На доске написано: $x^3 + ..x^2 + ..x + .. = 0$. Два школьника по очереди вписывают вместо многоточий действительные числа. Цель первого – получить уравнение, имеющее ровно один действительный корень. Сможет ли второй ему помешать?

5. Коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ удовлетворяют условию $2a + 3b + 6c = 0$. Докажите, что это уравнение имеет корень на интервале $(0, 1)$.

6. Решите уравнение $x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$.

7. Докажите, что любое кубическое уравнение $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ можно линейной заменой $z = x + \beta$ привести к виду $x^3 + px + q = 0$.

8. Какими должны быть числа $a$ и $b$, чтобы выполнялось равенство $x^3 + px + q = x^3 - a^3 - b^3 - 3abx$?

9. Выразите через $a$ и $b$ вещественный корень уравнения $x^3 - a^3 - b^3 - 3abx = 0$.

10. Докажите формулу Кардано для корня уравнения третьей степени $x^3 + px + q$:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

11. Решите уравнения $x^2 + x - 2 = 0$ и $x^2 + 3x - 4 = 0$ подбором и по формуле Кардано. Сравните результаты.

12. Решите уравнение $\sqrt{1 - x^2} = 4x^3 - 3x$.

13. Сколько корней на отрезке $[0, 1]$ имеет уравнение $8x(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$?