

Графы II

Трушин Борис Викторович

июль 2013 г.



Задача о деревенских свадьбах

В деревне живут несколько юношей и несколько девушек. Некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Требуется поженить максимально возможное число пар при условии, что женит можно только знакомые пары.

Задача о деревенских свадьбах

В деревне живут несколько юношей и несколько девушек. Некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Требуется поженить максимально возможное число пар при условии, что женит можно только знакомые пары.

Определение

Граф называется *двудольным*, если его вершины можно разбить на два множества X и Y таких, что каждое ребро графа соединяет некоторую вершину из X с некоторой вершиной из Y . Множества X и Y называются *долями* этого графа.

Задача о деревенских свадьбах

В деревне живут несколько юношей и несколько девушек. Некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Требуется поженить максимально возможное число пар при условии, что женит можно только знакомые пары.

Определение

Граф называется *двудольным*, если его вершины можно разбить на два множества X и Y таких, что каждое ребро графа соединяет некоторую вершину из X с некоторой вершиной из Y . Множества X и Y называются *долями* этого графа.

Теорема (Кёниг)

Граф является двудольным тогда и только тогда, когда он содержит более одной вершины и все его циклы имеют четную длину.

Определение

Паросочетанием в графе называется подграф, в котором все вершины имеют степень 1.

Определение

Паросочетанием в графе называется подграф, в котором все вершины имеют степень 1.

- Паросочетания существуют в любом графе, состоящем не только из изолированных вершин (подграф из двух смежных вершин и ребра между ними является паросочетанием).
- Чаще всего паросочетания рассматриваются для двудольных графов.

Определение

- Паросочетание в графе называется *максимальным*, если в графе нет паросочетаний с большим числом ребер.
- Вершина графа называется *насыщенной* в паросочетании, если в этом паросочетании существует ребро с концом в этой вершине; и *свободной* в паросочетании, если в паросочетании нет такого ребра.
- Паросочетание называется *совершенным*, если все вершины графа насыщены в этом паросочетании.

Задача о назначениях

Дан двудольный граф, требуется построить максимальное паросочетание.

Задача о назначениях

Дан двудольный граф, требуется построить максимальное паросочетание.

К такой графовой постановке сводятся самые разные задачи. Приведем несколько примеров:

- Задача о деревенских свадьбах.
- Назначение на должность: имеются вакантные должности и претенденты на них, о каждом претенденте известно какие должности он может занять, требуется заполнить максимум вакансий.
- Выбор представителей: в парламенте есть несколько комиссий, член парламента может заседать в нескольких комиссиях; нужно выбрать председателя каждой комиссии.

Определение

- Пусть дан граф, v – его произвольная вершина. *Окрестностью* вершины v называется множество $O(v)$ всех смежных ей вершин.
- Если M – произвольное множество вершин графа, то окрестностью множества M называется множество $O(M)$ всех вершин, смежных хотя бы с одной вершиной из M .

Определение

- Пусть дан граф, v – его произвольная вершина. *Окрестностью* вершины v называется множество $O(v)$ всех смежных ей вершин.
- Если M – произвольное множество вершин графа, то окрестностью множества M называется множество $O(M)$ всех вершин, смежных хотя бы с одной вершиной из M .

Теорема (Холла)

Дан двудольный граф с долями X и Y . Совершенное паросочетание в нем существует тогда и только тогда, когда $|X| = |Y|$ и $|O(M)| \geq |M|$ для всякого $M \subset X$.