Симметрические многочлены. Формула Виета.

1. При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения $x^2-(m+1)x+m-1=0$ является наименьшей?

2. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2+2ax+2a^2+4a+3=0$ является наибольшей? Чему равна эта сумма?

3. Числа x, y, z удовлетворяют системе
$\begin{cases} x+y+z=a, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}. \end{cases}$
Докажите, что хотя бы одно из этих чисел равно a.

4. Выразите через элементарные симметрические многочлены следующие выражения:
a) $(x+y)(x+z)(y+z)$;
b) $x^3+y^3+z^3-3xyz$;
c) x^3+y^3;
d) $(x^2+y^2)(y^2+z^2)(x^2+z^2)$;
e) $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$;
f) $x^4+y^4+z^4$.

5. Решите систему уравнений:
$\begin{cases} xy(x+y)=30, \\ x^3+y^3=35. \end{cases}$

6. Постройте многочлен, корни которого равны квадратам корней многочлена x^3+x^2-2x-1.

7. Известно, что x_1, x_2, x_3 – корни уравнения $x^3-2x^2+x+1=0$. Составьте новое уравнение, корнями которого были бы числа $y_1=x_2x_3$, $y_2=x_1x_3$, $y_3=x_1x_2$.

8. Известно, что целые числа a, b, c удовлетворяют равенству $a+b+c=0$. Докажите, что $2a^4+2b^4+2c^4$ – квадрат целого числа.

9. Решите систему:
$\begin{cases} x+y+z &= a, \\ x^2+y^2+z^2 &= a^2, \\ x^3+y^3+z^3 &= a^3. \end{cases}$

10. Известно, что $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$. Найдите $a^4+b^4+c^4$.

11. Пусть известно, что все корни некоторого уравнения $x^3+px^2+qx+r=0$ положительны. Какому дополнительному условию должны удовлетворять его коэффициенты p, q и r для того, чтобы из отрезков, длины которых равны этим корням, можно было составить треугольник?

12. Положительные действительные числа $a_1, \ldots, a_n$ и k таковы, что $a_1+\ldots+a_n=3k$, $a_1^2+\ldots+a_n^2=3k^2$ и $a_1^3+\ldots+a_n^3>3k^3+k$. Докажите, что какие-то два из чисел $a_1, \ldots, a_n$ отличаются больше, чем на 1.

13. Каждые два из действительных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 отличаются не менее чем на 1. Оказалось, что для некоторого действительного k выполнены равенства
$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2k$ и $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=2k^2$.
Докажите, что $k^2 \geq \frac{25}{3}$.