Графы

Трушин Борис Викторович

июль 2013 г.

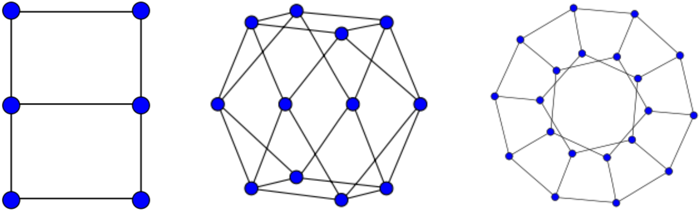
ЦЕНТР
ОНЛАЙН
ОБУЧЕНИЯ

Определение

Графом называется геометрическая фигура, состоящая из точек и соединяющих их линий. Точки называются *вершинами*, а линии – *ребрами*.

Определение

Графом называется геометрическая фигура, состоящая из точек и соединяющих их линий. Точки называются *вершинами*, а линии – *ребрами*.



Определение

- Два ребра называются *смежными*, если они имеют общую вершину.
- Два ребра называются *кратными*, если они соединяют одну и ту же пару вершин.
- Ребро называется *петлей*, если его концы совпадают.
- *Степенью вершины* называют количество ребер, для которых она является концевой (при этом петли считают дважды).
- Вершина называется *изолированной*, если она не является концом ни для одного ребра.

Определение

- Два ребра называются *смежными*, если они имеют общую вершину.
- Два ребра называются *кратными*, если они соединяют одну и ту же пару вершин.
- Ребро называется *петлей*, если его концы совпадают.
- *Степенью вершины* называют количество ребер, для которых она является концевой (при этом петли считают дважды).
- Вершина называется *изолированной*, если она не является концом ни для одного ребра.

Определение

Граф без кратных ребер и петель называется *обыкновенным*.

Лемма о рукопожатиях

В любом графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер.

Лемма о рукопожатиях

В любом графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер.

Доказательство. Если ребро соединяет две различные вершины графа, то при подсчете суммы степеней вершин мы учтем это ребро дважды; если же ребро является петлей, то при подсчете суммы степеней вершин мы также учтем его дважды (по определению степени вершины).

Лемма о рукопожатиях

В любом графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер.

Доказательство. Если ребро соединяет две различные вершины графа, то при подсчете суммы степеней вершин мы учтем это ребро дважды; если же ребро является петлей, то при подсчете суммы степеней вершин мы также учтем его дважды (по определению степени вершины).

Из леммы о рукопожатиях легко вытекает следующий факт.

Следствие

В любом графе число вершин нечетной степени четно.

Пример

Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

Пример

Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

Решение. Если в государстве k городов, то дорог – $3k/2$. Это число не может быть равно 100.

Ответ. Не может.

Пример

Каждый из 102 учеников одной школы знаком не менее, чем с 68 другими. Докажите, что среди них найдутся четверо, имеющие одинаковое число знакомых.

Пример

Каждый из 102 учеников одной школы знаком не менее, чем с 68 другими. Докажите, что среди них найдутся четверо, имеющие одинаковое число знакомых.

Решение. Предположим противное. Тогда для каждого числа от 68 до 101 имеется не более трех человека, имеющие такое число знакомых. С другой стороны, имеется ровно 34 натуральных числа, начиная с 68 и заканчивая 101, а $102 = 34 \cdot 3$. Это означает, что для каждого числа от 68 до 101 есть ровно три человека, имеющие такое число знакомых. Но тогда количество людей, имеющих нечетное число знакомых, нечетно. Противоречие.

Определение

Путем (или *цепью*) в графе называют конечную последовательность вершин, в которой каждая вершина (кроме последней) соединена со следующей в последовательности вершин ребром.

Определение

Путем (или *цепью*) в графе называют конечную последовательность вершин, в которой каждая вершина (кроме последней) соединена со следующей в последовательности вершин ребром.

Определение

Циклом называют путь, в котором первая и последняя вершины совпадают.

Определение

Путем (или *цепью*) в графе называют конечную последовательность вершин, в которой каждая вершина (кроме последней) соединена со следующей в последовательности вершин ребром.

Определение

Циклом называют путь, в котором первая и последняя вершины совпадают.

Определение

Путь (или цикл) называют *простым*, если ребра в нем не повторяются.

Определение

Если в графе любые две вершины соединены путем, то такой граф называется *связным*.

Определение

Если в графе любые две вершины соединены путем, то такой граф называется *связным*.

Определение

Рассмотрим подмножество вершин графа такое, что каждые две вершины этого подмножества соединены путем, а никакая другая вершина не соединена ни с какой вершиной этого подмножества. Каждое такое подмножество (вместе со всеми ребрами исходного графа, соединяющими вершины этого подмножества) называется *компонентой связности*.

Пример

Докажите, что граф с n вершинами, степень каждой из которых не менее $\dfrac{n-1}{2}$,– связен.

Пример

Докажите, что граф с n вершинами, степень каждой из которых не менее $\dfrac{n-1}{2}$,– связен.

Решение. Рассмотрим две произвольных вершины и предположим, что они не соединены путем. Каждая из этих двух вершин по условию соединена не менее, чем с $\dfrac{n-1}{2}$ другими; при этом все эти вершины различны (если какие-то две из них совпадают, то есть путь, соединяющий исходные вершины). Таким образом, в графе не менее $\dfrac{n-1}{2}+\dfrac{n-1}{2}+2=n+1$ вершины. Противоречие.

Пример

В стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.

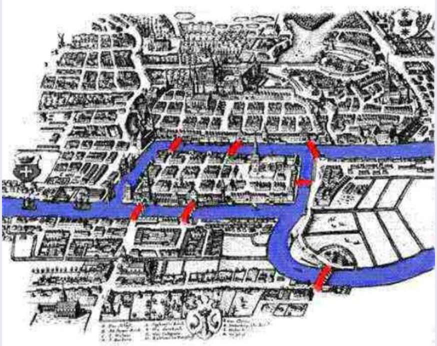
Пример

В стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.

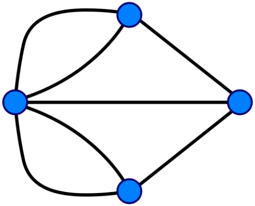
Решение. Если закрыта дорога AB, то нам достаточно доказать, что и после этого можно добраться из A в B. Рассмотрим компоненту связности, содержащую вершину A. Если в этой компоненте нет вершины B, то в этой компоненте все вершины кроме A имеют четную степень. Но наличие ровно одной вершины с нечетной степенью противоречит следствию из леммы о рукопожатиях.

Задача о кенигсбергских мостах

Город Кенигсберг (ныне Калининград) расположен на берегах реки Прегель и двух островах на этой реке. Части города соединены мостами. Спрашивается, можно ли, выйдя из какой-нибудь точки города, пройти по каждому мосту ровно один раз и вернуться в исходную точку.



Объектами в данной задаче являются части города, а связями – мосты. Поэтому этой задаче соответствует следующий граф:



Задача о кенигсбергских мостах эквивалентна вопросу о том, можно ли "обойти" данный граф, пройдя по каждому ребру ровно один раз и вернувшись в исходную вершину, то есть существует ли последовательность ребер графа со следующими свойствами:

- любые два соседних ребра имеют общую вершину;
- последнее ребро имеет общую вершину с первым;
- каждое ребро графа встречается в последовательности ровно один раз.

Определение

- *Эйлеровым путем* называется простой путь, содержащий все ребра.
- *Эйлеровым циклом* называется простой цикл, содержащий все ребра.
- *Эйлеровым графом* называется граф, в котором есть эйлеров цикл.

Определение

- *Эйлеровым путем* называется простой путь, содержащий все ребра.
- *Эйлеровым циклом* называется простой цикл, содержащий все ребра.
- *Эйлеровым графом* называется граф, в котором есть эйлеров цикл.

Теорема (Эйлер)

Граф без изолированных вершин является эйлеровым тогда и только тогда, когда он связен и степени всех его вершин четны.

Определение

- *Гамильтоновым путем* называется путь, проходящий через каждую вершину ровно один раз.
- *Гамильтоновым циклом* называется цикл, проходящий через каждую вершину ровно один раз.
- *Гамильтоновым графом* называется граф, в котором есть гамильтонов цикл.

Определение

- *Гамильтоновым путем* называется путь, проходящий через каждую вершину ровно один раз.
- *Гамильтоновым циклом* называется цикл, проходящий через каждую вершину ровно один раз.
- *Гамильтоновым графом* называется граф, в котором есть гамильтонов цикл.

Теорема (Оре)

Пусть дан обыкновенный связный граф, содержащий $n > 2$ вершин, такой что сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше, чем n. Тогда граф гамильтонов.