

Комплексные числа.

1. Найдите корни уравнений:

$$z^n = 1;$$

$$z^n = \omega, \text{ где } \omega — \text{ произвольное комплексное число.}$$

2. Найдите:

$$\text{a) } \sum_{k=0}^n \cos k\varphi; \quad \text{b) } \sum_{k=0}^n 2^k \sin k\varphi; \quad \text{c) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos k\varphi}{3^k}.$$

3. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC' , BCA' и CAB' . Пусть C_1, A_1, B_1 — их центры.

а) Пусть точки A, B, C соответствуют комплексным числам (координатам) a, b, c соответственно. Найдите координаты точек A', B', C' .

б) На плоскости существует комплексная система координат, для которой A, B, C имеют координаты $0, 1, c$ соответственно.

с) Треугольник $A_1B_1C_1$ правильный.

4. Вычислите суммы:

$$C_{100}^0 + C_{100}^1 + C_{100}^2 + \dots + C_{100}^{100};$$

$$C_{100}^0 - C_{100}^1 + C_{100}^2 - \dots + C_{100}^{100};$$

$$C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - \dots + C_{100}^{100}.$$

5. Докажите:

$$\text{a) } \operatorname{ctg}^2 x < \frac{1}{x^2} < \operatorname{ctg}^2 x + 1;$$

$$\text{b) } \sum_{j=0}^n (-1)^j C_{2n+1}^{2j+1} \operatorname{ctg}^{2n-2j} \frac{\pi k}{2n+1} = 0;$$

$$\text{c) } \sum_{k=1}^n \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi k}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3};$$

$$\text{d) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6};$$

$$\text{e) Найдите } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

6. На единичной окружности отмечены n точек, являющиеся вершинами правильного n -угольника. Одна из них соединена хордами с остальными. Найдите произведение длин этих хорд.

7. Найдите $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, если $x_{n+1} = 3x_n - 4y_n, y_{n+1} = 3y_n + 4x_n$ и

$$\text{a) } x_0 = 1, y_0 = 0;$$

$$\text{b) } x_0 = 1, y_0 = 2.$$