Делимость и остатки – 3: Сравнение по модулю

1. Найдите последнюю цифру числа $1^2 + 2^2 + \ldots + 99^2$.

2. x, y, z – натуральные числа, причем $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что xy делится на 12.

<u>*Определение*</u>*: целые числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если они имеют одинаковые остатки при делении на m. Это обозначается так* $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$.

3. Докажите, что $a \equiv b \pmod m$ тогда и только тогда, когда $a - b$ делится на m.

4. Действия с числами, сравниваемыми по модулю. Если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то:
а) $a + c \equiv b + d \pmod m$; б) $a - c \equiv b - d \pmod m$; в) $ac \equiv bd \pmod m$.

5. Найдите остаток от деления 6^{2000} на 7.

6. Докажите, что: а) $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31; б) $43^{101} + 23^{101}$ делится на 66; в) $a^n + b^n$ делится на a + b, если n – нечетное число.

7. а) Докажите, что среди 501 целого числа найдутся два, квадраты которых дают одинаковые остатки при делении на 1000.
б) Докажите, что различных остатков квадратов натуральных чисел при делении на n не более, чем $[n/2] + 1$.

8. Найдите остаток от деления на 7 числа $10^{10} + 10^{100} + 10^{1000} + \ldots + 10^{10000000000}$.

9. Сколько существует натуральных чисел n, меньших 10000, для которых $2^n - n^2$ делится на 7?

10. Сумма двух цифр a и b делится на 7. Докажите, что число $\overline{aba}$ также делится на 7.

11. а) Дано шестизначное число $\overline{abcdef}$, причем $\overline{abc} - \overline{def}$ делится на 7. Докажите, что и само число делится на 7.
б) Сформулируйте и докажите признак делимости на 7.
в) Сформулируйте и докажите признак делимости на 13.

12. Найдите все трехзначные числа, каждая натуральная степень которого оканчивается на три цифры, оставляющие первоначальное число.

13. К числу справа приписывают тройки. Докажите, что когда-нибудь получится составное число.

14. Решить уравнение в целых числах: $x^2 - 7y = 10$.

15. Решить уравнение в целых числах: $x^3 - 21y^2 + 5 = 0$.

16. Решить уравнение в целых числах: $15x^2 - 7y^2 = 9$.

17. Решить уравнение в целых числах: $x^2 + y^2 + z^2 = 8t - 1$.

18. Решить уравнение в целых числах: $3^m + 7 = 2^n$.

19. Докажите, что произведение последней цифры числа 2^n и суммы всех цифр этого числа, кроме последней, делится на 3.

20. Можно ли из цифр 2, 3, 4, 9 (каждую цифру можно использовать сколько угодно раз) составить два числа, одно из которых в 19 раз больше другого?

21. а) Дано шестизначное число $\overline{abcdef}$, причем $\overline{abc} + \overline{def}$ делится на 37. Докажите, что и само число делится на 37.
б) Сформулируйте и докажите признак делимости на 37.