

## Делимость-1

**Определение.** Число  $a$  делится на число  $b$  (обозначается  $a:b$ ), если существует такое число  $c$ , что  $a = bc$ . При этом числа  $b$  и  $c$  называются *делителями* числа  $a$ .

Любое число делится на 1 и на само себя. Может оказаться, что других делителей у данного числа нет.

**Определение.** Число называется *простым*, если оно имеет ровно два делителя — единицу и само себя. Число называется *составным*, если оно имеет более двух делителей.

Единица не считается ни простым, ни составным числом.

1. Найдите все делители числа: а) 108; б) 1001.
2. Докажите, что произведение трёх подряд идущих чисел делится на 6.
3. Незнайка заявил, что
  - а) если ни один из множителей, не делится на некоторое число, то и произведение не делится на это число;
  - б) если ни одно слагаемое не делится на некоторое число, то и сумма не делится на это число;
  - в) если сумма нескольких слагаемых делится на некоторое число, то и каждое слагаемое делится на это число.

Так ли это? Приведите опровергающие примеры.

4. Докажите, что если
  - а)  $a:c$  и  $b:c$ , то  $ab:c^2$
  - б)  $a:b$  и  $b:c$ , то  $a:c$
  - в)  $a:c$  и  $b:d$ , то  $ab:cd$
  - г)  $a:b$  и  $n$  — натуральное число, то  $a^n:b^n$
  - д\*)  $(ab):c$  и  $(a+b):c$ , то  $(a^2+b^2):c$  и  $(a^3+b^3):c^2$
5. Докажите, что если четырехзначное число не делится ни на одно простое от 2 до 97, то оно простое.
6. Докажите, что если  $d$  — делитель числа  $a$ , то  $a/d$  — также делитель числа  $a$ .
7. Докажите, что натуральное число имеет нечётное число натуральных делителей тогда и только тогда, когда оно является точным квадратом.
8. Докажите, что каждое составное число  $a$  имеет делитель  $p$ , больший 1, такой, что  $p^2 \leq a$ .
9. Докажите, что если  $p$  — простое число, большее 3, то  $(p^2 - 1) : 24$ .
10. Докажите, что простых чисел бесконечно много.