

Диаграммы Юнга

Шарич В.З., Масленникова М.С., <http://MathSchool.ru>

1. Найдите число всех диаграмм Юнга с весом s , если
 - (a) $s = 4$;
 - (b) $s = 5$;
 - (c) $s = 6$;
 - (d) $s = 7$.
2. На доске написано несколько целых положительных чисел: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Пишем на другой доске следующие числа: b_0 — сколько всего чисел на первой доске, b_1 — сколько там чисел, больших единицы, b_2 — сколько чисел, больших двойки, и т.д., пока получаются положительные числа. На этом заканчиваем — нули не пишем. На третьей доске пишем числа c_0, c_1, c_2, \dots , построенные по числам второй доски по тому же правилу, по которому числа b_0, b_1, b_2, \dots строились по числам первой доски. Докажите, что наборы чисел на первой и третьей досках совпадают.
3. Диаграммы Юнга $(4, 1, 1)$ и $(3, 3, 0)$ не сравнимы: ни одна из них не мажорирует другую.
 - (a) Есть ли еще такие несравнимые наборы с суммой 6?
 - (b) Найдите все несравнимые пары наборов для $s = 7$.
4. В обращении есть монеты достоинством в 1, 2, 5, 10, 20, 50 копеек и 1 рубль. Известно, что k монетами можно набрать m копеек. Докажите, что m монетами можно набрать k рублей.
5. У Алёши есть пирожные, разложенные в несколько коробок. Алёша записал, сколько пирожных в каждой коробке. Серёжа взял по одному пирожному из каждой коробки и положил их на первый поднос. Затем он снова взял по одному пирожному из каждой непустой коробки и положил их на второй поднос — и так далее, пока все пирожные не оказались разложенными по подносам. После этого Серёжа записал, сколько пирожных на каждом подносе. Докажите, что количество различных чисел среди записанных Алёшей равно количеству различных чисел среди записанных Серёжей.
6. Володя хочет сделать набор кубиков одного размера и написать на каждой грани каждого кубика по одной цифре так, чтобы можно было из этих кубиков выложить любое 30-значное число. Какого наименьшего количества кубиков ему для этого хватит? (Цифры 6 и 9 при переворачивании не превращаются друг в друга.)

Диаграммы Юнга

Шарич В.З., Масленникова М.С., <http://MathSchool.ru>

1. Найдите число всех диаграмм Юнга с весом s , если
 - (a) $s = 4$;
 - (b) $s = 5$;
 - (c) $s = 6$;
 - (d) $s = 7$.
2. На доске написано несколько целых положительных чисел: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Пишем на другой доске следующие числа: b_0 — сколько всего чисел на первой доске, b_1 — сколько там чисел, больших единицы, b_2 — сколько чисел, больших двойки, и т.д., пока получаются положительные числа. На этом заканчиваем — нули не пишем. На третьей доске пишем числа c_0, c_1, c_2, \dots , построенные по числам второй доски по тому же правилу, по которому числа b_0, b_1, b_2, \dots строились по числам первой доски. Докажите, что наборы чисел на первой и третьей досках совпадают.
3. Диаграммы Юнга $(4, 1, 1)$ и $(3, 3, 0)$ не сравнимы: ни одна из них не мажорирует другую.
 - (a) Есть ли еще такие несравнимые наборы с суммой 6?
 - (b) Найдите все несравнимые пары наборов для $s = 7$.
4. В обращении есть монеты достоинством в 1, 2, 5, 10, 20, 50 копеек и 1 рубль. Известно, что k монетами можно набрать m копеек. Докажите, что m монетами можно набрать k рублей.
5. У Алёши есть пирожные, разложенные в несколько коробок. Алёша записал, сколько пирожных в каждой коробке. Серёжа взял по одному пирожному из каждой коробки и положил их на первый поднос. Затем он снова взял по одному пирожному из каждой непустой коробки и положил их на второй поднос — и так далее, пока все пирожные не оказались разложенными по подносам. После этого Серёжа записал, сколько пирожных на каждом подносе. Докажите, что количество различных чисел среди записанных Алёшей равно количеству различных чисел среди записанных Серёжей.
6. Володя хочет сделать набор кубиков одного размера и написать на каждой грани каждого кубика по одной цифре так, чтобы можно было из этих кубиков выложить любое 30-значное число. Какого наименьшего количества кубиков ему для этого хватит? (Цифры 6 и 9 при переворачивании не превращаются друг в друга.)