

# Теория чисел

## Кусочек простых чисел

- 1) а) Пусть  $p > 3$  - простое число. Докажите, что  $(p^2 - 1) : 24$ .
- б) Для каких простых  $p$  число  $p^2 + 11$  имеет шесть делителей?
- 2) Пусть  $n > 2$ . Докажите, что между  $n$  и  $n!$  есть по крайней мере одно простое число.
- 3) Докажите, что множество простых чисел вида  $p = 4k + 3$  бесконечно.
- 4) Существуют ли идущие подряд 10 составных чисел? А 1000000000000?
- 5) При каких натуральных  $n$  число  $n^4 + 4$  составное?
- 6) Найти простые числа  $p$ , при которых  $p, p + 2, p + 4$  также являются простыми.
- 7) Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 снова простое число или 1.

### Делимость

- 8) Может ли произведение 4 подряд идущих натуральных чисел заканчиваться на 114?
- 9) Может ли число, которое оканчивается на 11 быть точным квадратом? А число, которое оканчивается на 55?
- 10) а) Может ли сумма трёх различных натуральных чисел делиться на каждое из слагаемых?
- б) А может ли сумма 1000000000 различных натуральных чисел делиться на каждое из слагаемых?
- 11) Найдите все числа, меньшие 1000, у которых ровно 30 натуральных делителей (включая 1 и само число).
- 12) Найдите наибольшее четырёхзначное число, все цифры которого различны и которое делится на 2, 5, 9 и 11.
- 13) Найдите две последние цифры числа  $2^{99} + 2^{999}$ .

### Остатки

- 14) Докажите, что  $n^3 + 2$  не делится на 9 ни при каком натуральном  $n$ .
- 15) Докажите, что  $n^5 + 4n$  делится на 5 при любом натуральном  $n$ .
- 16) Докажите, что число  $(1^{2015} + 2^{2015} + 3^{2015} + \dots + 16^{2015}) : 17$ .
- 17.1) Известно, что сумма квадратов двух чисел делится на 7. Докажите, что тогда эта сумма делится на 49.
- 17.2) Известно, что сумма квадратов двух чисел делится на 3. Докажите, что тогда эта сумма делится на 9.
- 17) Используя две предыдущие задачи докажите, что если сумма квадратов двух чисел делится на 21, то эта сумма делится на 441.
- 18) Докажите, что  $2100^{2100^{2100}} - 1$  делится на 2101. А верно ли, что  $261^{261^{261}} - 1$  делится на 262?
- 19) Какой остаток от деления на три дают числа а)  $3^9 + 4^9$ ? б)  $4^9 + 5^9$ ? в)  $4^{10} + 5^{10}$ ?
- 20) Даны целые числа  $a, b, c$ , такие что,  $(a + b + c) : 6$ . Докажите, что  $(a^3 + b^3 + c^3) : 6$ .
- 21) Найдите все точные квадраты, составленные только из цифр 1, 5 или 9.
- 22) Найдите все пары таких простых  $p$  и  $q$ , что  $p^3 - q^5 = (p + q)^2$ .