

### Делимость-3

1. Каждый следующий день смены семиклассник получает в два раза меньше комариных укусов, чем в предыдущий. Может ли он за два дня подряд получить 2000 укусов?
  2. Найдите последнюю цифру числа а)  $2001^{2001}$ ; б)  $549^{49}$ ; в)  $345673^{376543}$ ; г)  $77^{77}$ .
  3. На сколько нулей заканчивается число  $2000!$ ? Найдите последнюю ненулевую цифру числа  $2000!$
  4. а) Пусть  $A : B$ . Докажите что  $\text{НОД}(A, B) = B$ .  
 б) Пусть  $A < B$ . Докажите, что  $\text{НОД}(A, B) = \text{НОД}(A, B - A)$ .  
 в) Пусть  $B = K \cdot A + R$ , где  $R < A$  — остаток от деления  $B$  на  $A$ . Докажите, что  $\text{НОД}(A, B) = \text{НОД}(R, A)$ .  
 г) Найдите НОД следующих чисел: 1) 1998 и 8991; 2) 7387 и 82861; 3) 409457 и 938561.  
 д) Найдите  $\text{НОД}(2A + 13, A + 7)$ .  
 е) Найдите  $\text{НОД}(2^{100} - 1, 2^{120} - 1)$ .
  5. Доказать, что квадрат любого натурального числа ...  
 а) ... либо делится на 9, либо дает при делении на 3 остаток 1.  
 б) ... при делении на 4 дает остатки либо 0, либо 1.
- Определение.** Разделить целое число  $N$  на натуральное число  $m$  с остатком означает представить  $N$  в виде  $N = km + r$ , где  $0 \leq r < m$ . При этом неотрицательное число  $r$  называется *остатком от деления*, а целое число  $k$  — *неполным частным*.
6.  $x = 100k - 16$ ,  $k$  — целое. Чему равны частное и остаток при делении  $x$  а) на 100; б) на 5?
  7. Делимое и делитель увеличили в 7 раз. Как изменятся неполное частное и остаток?
  8. Найдите остаток от деления числа  $2016 \cdot 2017 \cdot 2018 + 2019^3$  на 7.
  9. Докажите, что разность двух чисел делится на  $b$  тогда и только тогда, когда числа дают одинаковые остатки при делении на  $b$ .
  10. Пусть число  $a_1$  дает при делении на  $b$  остаток  $r_1$ , число  $a_2$  — остаток  $r_2$ , тогда, используя определение, докажите основные свойства остатков:
    - а) (Сложение остатков) Число  $a_1 + a_2$  при делении на  $b$  дает тот же остаток, что и число  $r_1 + r_2$ .
    - б) (Вычитание остатков) Число  $a_1 - a_2$  при делении на  $b$  дает тот же остаток, что и число  $r_1 - r_2$ .
    - в) (Умножение остатков) Число  $a_1 \cdot a_2$  при делении на  $b$  дает тот же остаток, что и число  $r_1 \cdot r_2$ .
  11. а) Докажите, что  $n^3 + 2n$  делится на 3 при любом натуральном  $n$ . А если  $n$  — целое число? б) Докажите, что  $n^3 + 2$  не делится на 9 ни при каком натуральном  $n$ .
  12. Натуральные числа  $x, y, z$  таковы, что  $x^2 + y^2 = z^2$ . Докажите, что одно из них делится а) на 2; б) на 3; в) на 5.
  13. Три простых числа  $p, q$  и  $r$ , больших 3, образуют арифметическую прогрессию:  $p = p$ ,  $q = p + d$ ,  $r = p + 2d$ . Докажите, что  $d : 6$ .