

Математика — часть 1

1. Решите уравнение $\frac{\cos x - \sin 2x}{\sqrt{2 \sin x - 1}} = 0$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} y \operatorname{ctg} x = -9 \\ y \operatorname{tg} x = -3 \end{cases}$.

3. Решите уравнение $\sin 2x - 2\sqrt{3} \sin^2 \left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-2, 5\pi; -\pi]$.

4. Основанием пирамиды $SABC$ является прямоугольный треугольник ABC , $\angle C = 90^\circ$, $BC = 4$, $AC = 6$, боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания пирамиды. Найдите расстояние от точки C до плоскости BLM , где L , M — середины ребер SC и AC соответственно.

5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой $F_1 E_1$.

6. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка S — вершина. Точка M — середина ребра SA , точка K — середина ребра SC . Найдите угол между плоскостями BMK и ABC , если $AB = 6$, $SC = 8$.

7. Решите неравенство $\frac{(2x^2 - x - 18)^2}{2x + 5} \leq \frac{(3x^2 + x - 17)^2}{2x + 5}$.

8. Решите неравенство

$$\log_3(x^2 - x - 3) + \log_3(2x^2 + x + 3) \geq \log_3(x^2 - 2)^2 + 2 + \log_{1/3} 4.$$

9. Решите систему $\begin{cases} \log_{2x+3}(3x-5) + \log_{3x-5}(2x+3) \leq 2 \\ 25^x - 5 \cdot 10^x - 6 \cdot 4^x \leq 0 \end{cases}$

10. Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, равна 63, точка касания вписанной окружности с боковой стороной делит эту сторону в отношении 20:9, считая от основания. Найдите радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон.

11. Расстояние между центрами окружностей радиусов 2 и 8 равно 15. Этим окружностям и их общей внутренней касательной касается третья окружность. Найдите ее радиус.

12. Точка M лежит на отрезке AB . На окружности радиуса $65/2$, проходящей через точки A и B , взята точка C , удаленная от точек A , M и B на расстояния 52,

50 и 60 соответственно. Известно, что $AB > AC$. Найдите площадь треугольника BMC .

13. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x - a)^2 + (y - 2a)^2} = |a|\sqrt{5} \\ y = ax + a^2 - 4 \end{cases}$$

имеет более одного решения.

14. Найти все значения параметра a , при каждом из которых среди значений функции $y = \frac{x^2 - 2x + a}{6 + x^2}$ есть ровно одно целое число.

15. Метеоролог вводит в компьютер измерения температуры воздуха. Температура измеряется с точностью до одной десятой градуса. За все время наблюдений температура наблюдалась выше $20^\circ C$, но ниже $26^\circ C$. Всего метеоролог ввел 22 измерения, но из-за усталости и плохой клавиатуры один раз вместо десятичной запятой метеоролог нажал клавишу «0», а другой раз вообще не нажал десятичную запятую. После упорядочивания данных получился ряд из 22 чисел, начинающийся числами 21,3; 21,7... Если из полученного ряда удалить два первых числа, среднее арифметическое оставшихся равно 149,53. Если удалить два последних, то среднее арифметическое оставшихся равно 23,28. Определите, в каких числах и какие ошибки допустил метеоролог.

16. Натуральные числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причем все они больше 500 и являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное, при указанных условиях, значение b .

Математика — часть 1 (ОТВЕТЫ)

- | | |
|--|---------------------------------------|
| 1. $\pi/2 + 2n\pi$. | 9. $(5/3, \log_{5/2} 6]$. |
| 2. $y = \pm 3\sqrt{3}, x = \mp \pi/6 + n\pi$. | 10. 63, 140. |
| 3. $x = \pi/2 + k\pi, x = \pi/3 + k\pi$;
корни $-5\pi/2, -3\pi/2, -5\pi/3$. | 11. 125/32, 125/8. |
| 4. 12/5. | 12. 1200, 528. |
| 5. 2. | 13. 2. |
| 6. $\cos \varphi = \sqrt{36/59}$. | 14. (1,11) |
| 7. $[-\sqrt{7}, -5/2) \cup \{-1\} \cup [\sqrt{7}, +\infty)$ | 15. 23,9 и 25,9 (описка: 2309 и 259). |
| 8. Не была решена. | 16. 1369. |