

СЕРБСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА  
УЧАЩИХСЯ СРЕДНИХ ШКОЛ

5 апреля 2013 г.

Первый день

1. Дано натуральное число  $k$ . Пусть  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  — биекция, такая что для любых двух целых чисел  $i$  и  $j$ , удовлетворяющих неравенству  $|i - j| \leq k$ , выполнено неравенство  $|f(i) - f(j)| \leq k$ . Докажите, что для всех  $i, j \in \mathbb{Z}$  справедливо

$$|f(i) - f(j)| = |i - j|.$$

2. Пусть

$$S_n = \{C_n^n, C_{2n}^n, C_{3n}^n, \dots, C_{n^2}^n\}, \quad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

- а) Докажите, что найдется бесконечно много составных натуральных чисел  $n$ , таких что  $S_n$  не является полной системой вычетов по модулю  $n$ .
- б) Докажите, что найдется бесконечно много составных натуральных чисел  $n$ , таких что  $S_n$  является полной системой вычетов по модулю  $n$ .
3. Пусть  $M$ ,  $N$  и  $P$  — середины сторон  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$ , соответственно, а  $O$  — центр описанной окружности остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружности, описанные около треугольников  $BOC$  и  $MNP$ , пересекаются в различных точках  $X$  и  $Y$  внутри треугольника  $ABC$ . Докажите, что

$$\sphericalangle BAX = \sphericalangle CAU.$$