Алгебра и теория чисел

Младшая лига

1. На доске записаны числа от 1 до 2011. Двое играющих по очереди стирают по одному числу, пока не останутся два числа p и q. Если ни одно из уравнений $x^2 + px + q = 0$ и $x^2 + qx + p = 0$ не имеет целых корней, то ходивший первым выигрывает. Может ли второй ему помешать?

2. Какое наименьшее количество натуральных делителей может иметь число $p^2 + 2011$ при простом p?

3. Положительные числа a, b, c таковы, что произведение любых двух из них больше 1. Докажите неравенство:

$$\frac{a+b+1}{a^2+b^2+1} + \frac{b+c+1}{b^2+c^2+1} + \frac{a+c+1}{a^2+c^2+1} < \frac{2}{a+1} + \frac{2}{b+1} + \frac{2}{c+1}.$$

4. Докажите, что для каждого натурального m найдётся натуральное k такое, что число $3^{k+1} - 2^k - k$ делится на m.

Старшая лига

5. Дан многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $p(2011) = 1$, $p(1) = 2011$ и $p(m) = m$ для некоторого целого m. Найдите все возможные значения m.

6. *Радикалом* $r(n)$ натурального числа n назовем произведение всех его различных простых делителей. Например, $r(2000) = 10$, $r(2011) = 2011$. Последовательность натуральных чисел задается первым членом a_1 и соотношением $a_{n+1} = a_n + r(a_n)$ при $n \geqslant 1$. Докажите, что в ней встретится миллион подряд идущих членов, образующих арифметическую прогрессию.

7. Положительные числа a, b, c таковы, что $ab + bc + ac = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{(a+b)^2+1}{c^2+2} + \frac{(b+c)^2+1}{a^2+2} + \frac{(a+c)^2+1}{b^2+2} \geqslant 3.$$

8. Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных чисел m, n таких, что $n! + 1$ делится на m, но $m - 1$ не делится на n.

Геометрия

Младшая лига

9. В треугольнике ABC проведена медиана AA_1 и на ней отмечена точка M — точка пересечения медиан. Точка K на стороне AB такова, что $MK \parallel AC$. Оказалось, что

$AM = CK$. Найдите угол ACB.

10. На плоскости отмечено 2011 точек. Назовем пару отмеченных точек A и B *изолированной*, если все остальные точки находятся строго вне круга, построенного на AB как на диаметре. Какое наименьшее количество изолированных пар может быть?

11. В треугольнике ABC точки M и L на стороне BC — основания медианы и биссектрисы соответственно, проведенных из вершины A. Точки P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из точки L на стороны AB и AC соответственно. Точка X на медиане AM такова, что $XL \perp BC$. Докажите, что точки P, X и Q лежат на одной прямой.

12. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ оказалось, что $AB + CD = \sqrt{2} \cdot AC$ и $BC + DA = \sqrt{2} \cdot BD$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

Старшая лига

13. В прямоугольнике $ABCD$ точка P — середина стороны AB, а точка Q — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на PD. Докажите, что $BQ = BC$.

14. Дан тетраэдр $ABCD$. Сфера, проходящая через вершины A, B и C, пересекает боковые ребра DA, DB и DC в точках A_1, B_1 и C_1. Эти точки отразили относительно середин соответствующих ребер и получили точки A_2, B_2 и C_2. Докажите, что точки A, B и C равноудалены от центра описанной сферы тетраэдра $DA_2B_2C_2$.

15. Точки A, B, C, D лежат на окружности в указанном порядке, причём AB и CD непараллельны. Длина дуги AB, содержащей точки C и D, в два раза больше длины дуги CD, не содержащей точек A и B. Точка E задаётся условиями $AC = AE$ и $BD = BE$. Оказалось, что перпендикуляр из точки E на прямую AB проходит через середину дуги CD, не содержащей точек A и B. Найдите $\angle ACB$.

16. На плоскости отмечено 2011 точек. Назовем пару отмеченных точек A и B *изолированной*, если все остальные точки находятся строго вне круга, построенного на AB как на диаметре. Какое наибольшее количество изолированных пар может быть?

Комбинаторика и логика

Младшая лига

17. Можно ли квадрат 10×10 разрезать по клеточкам на 11 прямоугольников, среди которых нет подобных?

18. По кругу стоит 2011 представителей трех племен: рыцари, лжецы и конформисты. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда лжет, а конформист может лгать, только если стоит рядом с лжецом (или может сказать правду). Каждый заявил: «Мои соседи из разных племен». Какое минимальное количество лжецов может быть среди них?

19. На доске написаны 8 чисел. Двое ходят по очереди. За один ход нужно заменить два различных числа двумя равными с такой же суммой. Если в какой-то момент можно будет разбить все числа на две четверки с равными суммами, то первый выиграет. Может ли второй ему помешать?

20. В стране несколько (больше 3) городов, некоторые из которых связаны дорогами. Оказалось, что при закрытии любого города, от любого города до любого можно добраться не заезжая в закрытый город, однако, при закрытии любой дороги это свойство нарушается. Докажите, что в этой стране нет трех городов, попарно связанных дорогами.

21. В некоторых клетках бесконечной клетчатой полоски стоят черные фишки, в некоторых белые, а в остальных не стоит ничего. Всего фишек конечное количество, в каждой клетке не более одной. Разрешается производить одну из следующих операций:
(i) если подряд идущие (в таком порядке) клетки A, B, C таковы, что в A и в C стоят фишки разного цвета, то в клетку B можно поставить фишку любого цвета, если эта клетка пуста, или убрать оттуда фишку, если там стоит фишка;
(ii) если подряд идущие (в таком порядке) клетки A, B, C, D заполнены фишками, причем фишки в клетках A и D одинаковые, то можно поменять местами фишки в клетках B и C.
Докажите, что такими операциями нельзя поменять цвет фишки, стоящей между двумя одноцветными фишками (при этом сохранить общее количество фишек, и в каждой из остальных клеток, в которой изначально стояла фишка, оставить фишку того же цвета).

Старшая лига

22. Дана прямоугольная клетчатая доска площади больше одной клетки. Докажите, что можно отметить несколько её клеток (но не все) так, чтобы каждая неотмеченная клетка имела ровно одного отмеченного соседа по стороне.

23. В некоторой стране имеется n провинциальных городов и столица. Столица соединена прямыми беспосадочными авиарейсами со всеми городами. Кроме того, некоторые пары провинциальных городов также соединены авиарейсами, причем из любого провинциального города можно единственным образом добраться самолетом до любого другого (возможно, с пересадками в других провинциальных городах — но не в столице), не залетая в один и тот же город дважды. Правительство хочет сделать каждое действующее авианаправление односторонним так, чтобы, вылетев из любого города, в него нельзя было вернуться. Сколько способов у правительства осуществить свой план? (Например, для $n = 2$ ответ — 6 способов).

24. Каждая точка окружности окрашена в один из ста цветов. Докажите, что найдется вписанная в окружность трапеция, все вершины которой — одного цвета.

25. Имеется 18 гирь массами от 1 до 18 граммов. На них наклеены (невесомые) наклейки с числами от 1 до 18, указывающие массу, но две наклейки перепутаны. Можно ли за 4 взвешивания на весах со стрелкой (показывающих суммарную массу положенных на чашку весов гирь) наверняка определить, какая именно пара наклеек перепутана?

26. Компания из нескольких людей называется *связной*, если ее нельзя разбить на две непустые группы так, что люди из разных групп будут не знакомы. В некоторой связной компании каждый знает ровно четверых, и четверо знакомых каждого человека образуют связную компанию. Докажите, что людей этой компании можно поставить по кругу так, чтобы любые два соседа были знакомы.

Командная олимпиада

Младшая лига

27. (4) В ряд лежат 11 монет, любые два соседа отличаются на 1 грамм. Известно, что у одной не крайней монеты оба соседа легче её, а у остальных не крайних — один сосед легче, другой — тяжелее. Как найти самую тяжелую монету за 2 взвешивания на чашечных весах без гирь?

28. (5) В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Известно, что $AB = 2007$, $BL = AC$. Найдите стороны треугольника ABC, если известно, что они целые.

29. (5) Ученики школы посещают кружки. Докажите, что можно несколько школьников принять в пионеры так, чтобы в каждом кружке был хотя бы один пионер и для любого пионера нашелся кружок, в котором он был бы единственным пионером.

30. (6) Назовем натуральное число *интересным*, если оно представимо в виде $a^2+2011b^2$ для некоторых натуральных a и b. Докажите, что если для простого p число p^2 является интересным, то хотя бы одно из чисел p, $2p$ тоже интересное.

31. (8) Числа a, b и c лежат в отрезке $[2, 4]$. Докажите неравенство:

$$\frac{2}{a+b^2+c^3}+\frac{2}{b+c^2+a^3}+\frac{2}{c+a^2+b^3}\leqslant\frac{3}{a+b+c}.$$

32. (10) На доске написаны числа от 1 до 1000. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход нужно заменить любые два числа на их сумму. Если одно из двух последних оставшихся на доске чисел делится на второе, то выигрывает Вася, иначе – Петя. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?

33. (10) Точки P и Q на стороне AB выпуклого четырехугольника $ABCD$ таковы, что $AP = QB$. Точка X — отличная от D точка пересечения описанных окружностей треугольников APD и DQB, а точка Y — отличная от C точка пересечения описанных окружностей треугольников ACP и QCB. Докажите, что точки C, D, X и Y лежат на одной окружности.

34. (12) В узлах правильного шестиугольника, разбитого на правильные треугольники (см. рис. 1) расставили натуральные числа от 1 до 37. Будем называть треугольник *хорошим*, если направление обхода его вершин от меньшего числа к большему по часовой стрелке. Докажите, что при любой расстановке хороших треугольников не меньше 19.

Старшая лига

35. (3) Решите систему уравнений в действительных числах:
$a^2 + b^2 = 2c, \quad 1 + a^2 = 2ac, \quad c^2 = ab.$

36. (4) Клетки квадрата 50×50 покрашены в 50 цветов, причем клеток каждого цвета ровно 50. Докажите, что найдется линия (строка или столбец), содержащая клетки не менее чем 8 разных цветов.

37. (6) Сколько решений в натуральных числах при данном натуральном n имеет уравнение $3x^2 + 5y^2 = 2^n$?

38. (6) Отрезок AL — биссектриса треугольника ABC, I_1 и I_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABL и ACL соответственно. Прямая I_1I_2 пересекает стороны AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Докажите, что прямые BB_1, CC_1 и AL пересекаются в одной точке.

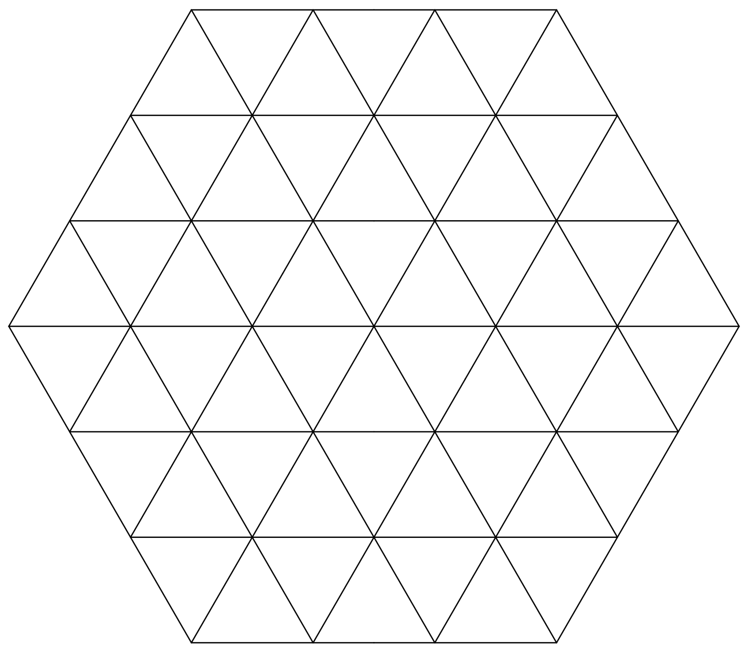

Рис. 1: К задаче 34.

39. (7) Дан круг площади 1. Для множества A в круге и диаметра d этого круга обозначим A_d множество, симметричное A относительно d. Существует ли множество A площади $1/2$ в круге такое, что пересечение $A \cap A_d$ имеет площадь, равную $1/4$, для любого диаметра d?

40. (7) Даны числа a, b, c из отрезка $[1, 2]$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+a+b^2}+\frac{1}{1+b+c^2}+\frac{1}{1+c+a^2} \leqslant \frac{3}{a+b+c}.$$

41. (8) Найдите все функции $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ такие, что $f(x+f(x)+2y) = f(2x)+2f(y)$ при всех неотрицательных x, y и уравнение $f(x) = 0$ имеет конечное (возможно, нулевое) количество решений.

42. (9) Дан треугольник ABC и концентрические окружности ω_b, ω_c с центром в A. Произвольный луч, выходящий из A, пересекает эти окружности в точках B' и C' соответственно. Серединные перпендикуляры к отрезкам BB' и CC' пересекаются в точке X. Докажите, что точки X, построенные таким образом для всех лучей, выходящих из A, лежат на одной прямой.

43. (10) Пусть B_k — количество способов разбить k-элементное множество на непустые подмножества (например, $B_3 = 5$, потому что множество $\{1, 2, 3\}$ имеет 5 разбиений: (123), (1,2,3), (12,3), (13,2), (1,23)). Докажите, что если p — простое число, а k — натуральное, то $B_{k+p^p-1} - B_k$ делится на p.

Регата

Младшая лига

Алгебра и теория чисел

44. Решите систему уравнений $x + yz = y + zx = z + xy = 6$.

45. При каком наибольшем n найдутся n последовательных натуральных чисел, чьё произведение оканчивается на 3000?

46. Пусть $P(x)$ — квадратный трехчлен с целыми коэффициентами (и ненулевым старшим коэффициентом) такой, что $P(1) = 2011$ и $P(2011) = 1$. Может ли оказаться, что $P(m) = m$ при некотором целом m?

47. В клетках квадрата 10×10 расставили все натуральные числа от 1 до 100, и вычислили произведения в каждой строке и в каждом столбце. Может ли самое большое из произведений в строке делится на каждое из произведений в столбце?

Геометрия

48. Точка P лежит на стороне BC квадрата $ABCD$. На отрезке AP построили квадрат $APRS$. Докажите, что угол RCD равен $45°$. (Вершины обоих квадратов занумерованы по часовой стрелке.)

49. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) угол BAC равен $40°$. Точки S и T на сторонах AB и BC соответственно таковы, что $\angle BAT = \angle BCS = 10°$. Отрезки AT и CS пересекаются в точке P. Докажите, что $BT = 2PT$.

50. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена биссектриса BD. Оказалось, что $BD + DA = BC$. Найдите углы треугольника ABC.

51. На смежные стороны a и b параллелограмма $ABCD$ опущены соответственно высоты h_a и h_b. Известно, что $a + h_a = b + h_b$. Рассмотрим отрезки AB, AC, AD, BC, BD, CD. Какое наибольшее количество различных может быть среди них?

Комбинаторика

52. Докажите, что квадрат 16×16 можно разрезать на прямоугольники 1×4 так, чтобы никакой узел решетки не принадлежал четырем прямоугольникам разрезания.

53. Двое игроков по очереди проводят красные и синие прямые на плоскости, так, чтобы они не проходили через точки пересечения других прямых и не были им параллельны. При этом каждый игрок на каждом ходу выбирает, будет проведенная им прямая красной или синей. Игра заканчивается, когда оба игрока проведут по 20 прямых. Второй старается сделать как можно больше точек, где пересекаются прямые разного цвета, первый ему мешает. Какого наибольшего количества таких точек может гарантированно добиться второй?

54. Есть 100 одинаковых с виду монет. Известно, что среди них ровно 4 фальшивых, которые весят одинаково, но легче настоящих. Как найти за 2 взвешивания на чашечных весах без гирь хотя бы 13 настоящих?

55. На острове живут только лжецы (всегда лгут) и рыцари (всегда говорят правду). На вопрос «Чётно ли число рыцарей, с которыми вы дружите?» каждый ответил «нет». На вопрос «Чётно ли число лжецов, с которыми вы не дружите?» каждый ответил «да». Чётно или нечётно число жителей острова? (Дружба взаимна.)

Старшая лига

Алгебра и теория чисел

56. Решите уравнение в действительных числах: $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy$.

57. Дано натуральное число $k > 1$. Если a, b, c натуральные числа и a делит b^k, b делит c^k, c делит a^k, при каком наименьшем $n = n(k)$ можно утверждать наверняка, что abc делит $(a+b+c)^n$?

58. Найдите все действительные α, для которых система уравнений

$$\frac{a^3}{b+c+\alpha} = \frac{b^3}{c+a+\alpha} = \frac{c^3}{a+b+\alpha}$$

имеет решение в различных действительных a, b, c из $[-1; 1]$.

59. Решите в простых числах уравнение $p^2 + pq + q^2 = r^2$.

Геометрия

60. В правильной пирамиде $ABCDS$ (S — вершина) длина AS равна 1, а угол ASB равен $30°$. Найдите длину кратчайшего пути из в A в A, пересекающего все боковые рёбра, кроме AS.

61. В четырёхугольнике $ABCD$ с углами $\angle A = 60°$, $\angle B = 90°$, $\angle C = 120°$ отметили точку пересечения диагоналей M. Оказалось, что $BM = 1$ и $MD = 2$. Найдите площадь $ABCD$.

62. На прямой даны точки A, B, C, причём точка B лежит между A и C, $AB = 3$ и $BC = 5$. Пусть BMN — равносторонний треугольник. Найдите наименьшее значение $AM + CN$.

63. Во вписанном шестиугольнике $ABCDEF$ оказалось, что $AB = BC$, $CD = DE$ и $EF = FA$. Докажите, что $S_{ABCDEF} = 2S_{BDF}$.

Комбинаторика

64. Клетчатый квадрат $N \times N$ разрезали по границам клеток на многоугольники площади не больше k (для некоторого $k > 3$). Есть многоугольник, который граничит со всеми остальными. Докажите, что $N < \sqrt{3}k$.

65. Хромые весы – это чашечные весы без гирь. После того, как они второй раз покажут, что одна из чаш перевешивает, они ломаются насовсем. Из N монет одна фальшивая, легче настоящих. При каком наибольшем N можно найти ее за k взвешиваний на хромых весах? (Весы не жалко.)

66. Даны натуральные числа $n \geqslant k$. В некоторой школе ученики посещают n кружков, причем для любых k кружков каждый школьник занимается хотя бы в одном из них, но ни для каких $k-1$ кружков это уже не верно. Каково наименьшее возможное количество учеников в такой школе?

67. Пусть n — натуральное число. При каких натуральных $k \leqslant n$ в квадрате $n \times n$ можно расставить числа так, чтобы сумма всех чисел в таблице была положительной, а сумма чисел в каждом квадрате $k \times k$ — отрицательной?