

1. (3) Решити систем једначина у скупу реалних бројева:

$$a^2 + b^2 = 2c \quad 1 + a^2 = 2ac \quad c^2 = ab.$$

2. (4) Поља квадратне табле 50×50 обојена су са 50 боја, при чему је сваком бојом обојено тачно 50 поља. Доказати да постоји линија (врста или стубац) у којој су поља обојена са не мање од 8 различитих боја.

3. (6) За дати природан број n , колико решења у скупу природних бројева има једначина $3x^2 + 5y^2 = 2^n$?

4. (6) Одсечак AL је бисектриса троугла ABC , I_1 и I_2 су центри кругова уписаних у троуглове ABL и ACL редом. Права I_1I_2 пресеца странице AB и AC у тачкама C_1 и B_1 редом. Доказати да се праве BB_1 , CC_1 и AL секу у једној тачки.

5. (7) Дат је круг површине 1. Ако је A скуп унутар тог круга и ако је d дијаметар тог круга, означимо са A_d скуп симетричан скупу A у односу на d . Да ли унутар тог круга постоји скуп A површине $1/2$, такав да пресек $A \cap A_d$ има површину $1/4$ за произвољан дијаметар d ?

6. (7) Дати су бројеви a , b и c из отсечка $[1, 2]$. Доказати неједнакост

$$\frac{1}{1+a+b^2} + \frac{1}{1+b+c^2} + \frac{1}{1+c+a^2} \leq \frac{3}{a+b+c}.$$

7. (8) Наћи све функције $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ такве да је $f(x + f(x) + 2y) = f(2x) + 2f(y)$ за све ненегативне x и y и да једначина $f(x) = 0$ има коначан број (могуће је нула) решења.

8. (9) Дати су троугао ABC и концентрични кругови ω_b и ω_c са центром у A . Произвољна полуправа која полази из A пресеца те кругове у тачкама B' и C' редом. Симетрале одсечака BB' и CC' секу се у тачки X . Доказати да тачке X конструисане на тај начин за све полуправе које полазе из A , леже на једној правој.

9. (10) Нека је B_k број разлагања k -елементног скупа на непразне подскупе. (на пример, $B_3 = 5$, зато што скуп $\{1, 2, 3\}$ има 5 разлагања: (123) , $(1,2,3)$, $(12,3)$, $(13,2)$, $(1,23)$). Ако је p прост број и k природан број, доказати да је $B_{k+p^p-1} - B_k$ дељиво са p .