IV International Zhautykov Olympiad in Mathematics
Almaty, 2008

January 16, 2008. 9:00–13:00
First Day
(Each problem is worth 7 points.)

1. Points K, L, M, N are respectively the midpoints of sides AB, BC, CD, DA in a convex quadrilateral $ABCD$. Line KM meets diagonals AC and BD at points P and Q, respectively. Line LN meets diagonals AC and BD at points R and S, respectively.

Prove that if $AP \cdot PC = BQ \cdot QD$ then $AR \cdot RC = BS \cdot SD$.

2. A polynomial $P(x)$ with integer coefficients is called *good* if it can be represented as a sum of cubes of several polynomials (in variable x) with integer coefficients. For example, the polynomials $x^3 - 1$ and $9x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = (x-1)^3 + (2x)^3 + 2^3$ are good.

a) Is the polynomial $P(x) = 3x + 3x^7$ good?

b) Is the polynomial $P(x) = 3x + 3x^7 + 3x^{2008}$ good?

Justify your answers.

3. Let $A = \{(a_1, \ldots, a_8) \mid a_i \in \mathbb{N},\ 1 \le a_i \le i+1 \text{ for each } i = 1, \ldots, 8\}$. A subset $X \subset A$ is called *sparse* if for each two distinct elements $(a_1, \ldots, a_8), (b_1, \ldots, b_8) \in X$, there exist at least three indices i such that $a_i \ne b_i$.

Find the maximal possible number of elements in a sparse subset of set A.

IV Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2008

16 января, 2008. 9:00–13:00
Первый день
(Каждая задача оценивается в 7 баллов.)

1. Точки K, L, M, N — соответственно середины сторон AB, BC, CD, DA выпуклого четырехугольника $ABCD$. Прямая KM пересекает диагонали AC и BD в точках P и Q соответственно. Прямая LN пересекает диагонали AC и BD в точках R и S соответственно.

Докажите, что если $AP \cdot PC = BQ \cdot QD$, то $AR \cdot RC = BS \cdot SD$.

2. Назовем многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами *хорошим*, если его можно представить в виде суммы кубов нескольких многочленов (от переменной x) с целыми коэффициентами. Например, многочлены $x^3 - 1$ и $9x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = (x-1)^3 + (2x)^3 + 2^3$ являются хорошими.

a) Является ли многочлен $P(x) = 3x + 3x^7$ хорошим?

b) Является ли многочлен $P(x) = 3x + 3x^7 + 3x^{2008}$ хорошим?

Обоснуйте ваши ответы.

3. Положим $A = \{(a_1, \ldots, a_8) \mid a_i \in \mathbb{N},\ 1 \le a_i \le i+1 \text{ для всех } i = 1, \ldots, 8\}$. Назовем подмножество $X \subset A$ *разреженным*, если для любых двух различных элементов $(a_1, \ldots, a_8), (b_1, \ldots, b_8) \in X$ существуют хотя бы три индекса i таких, что $a_i \ne b_i$.

Найдите наибольшее возможное количество элементов в разреженном подмножестве множества A.

IV International Zhautykov Olympiad in Mathematics
Almaty, 2008

January 17, 2008. 9:00–13:00
Second Day
(Each problem is worth 7 points.)

4. For each positive integer n, denote by $S(n)$ the sum of all digits in the decimal representation of n.

Find all positive integers n such that $n = 2S(n)^3 + 8$.

5. Nonintersecting circles ω_1 and ω_2 with centers O_1 and O_2 touch line ℓ at points A_1 and A_2, respectively (the circles lie on the same side of ℓ). Point K is the midpoint of segment A_1A_2. Points B_1 and B_2 are chosen on circles ω_1 and ω_2 respectively such that lines KB_1 and KB_2 touch ω_1 and ω_2 respectively (point B_1 is distinct from A_1, and point B_2 is distinct from A_2). Lines A_1B_1 and A_2B_2 meet in point L, and lines KL and O_1O_2 meet in point P.

Prove that points B_1, B_2, P, and L are concyclic.

6. Prove that for every positive real numbers a, b, c such that $abc = 1$, the inequality

$$\frac{1}{(a+b)b} + \frac{1}{(b+c)c} + \frac{1}{(c+a)a} \geq \frac{3}{2}$$

holds.

IV Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2008

17 января, 2008. 9:00–13:00
Второй день
(Каждая задача оценивается в 7 баллов.)

4. Для всякого натурального n обозначим через $S(n)$ сумму цифр в десятичной записи числа n.

Найдите все натуральные n такие, что $n = 2S(n)^3 + 8$.

5. Непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 касаются прямой ℓ в точках A_1 и A_2 соответственно (окружности лежат по одну сторону от ℓ). Точка K — середина отрезка A_1A_2. На окружностях ω_1 и ω_2 выбраны точки B_1 и B_2 соответственно так, что прямые KB_1 и KB_2 касаются ω_1 и ω_2 соответственно (точка B_1 отлична от A_1, а точка B_2 отлична от A_2). Прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке L, а прямые KL и O_1O_2 — в точке P.

Докажите, что точки B_1, B_2, P и L лежат на одной окружности.

6. Докажите, что для любых положительных действительных чисел a, b, c таких, что $abc = 1$, выполнено неравенство

$$\frac{1}{(a+b)b} + \frac{1}{(b+c)c} + \frac{1}{(c+a)a} \geq \frac{3}{2}.$$