Задание 14 (стереометрия)

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 2\sqrt{2}$, $AD = 6$, $AA_1 = 10$. На рёбрах AA_1 и BB_1 отмечены точки E и F соответственно, причём $A_1E : EA = 3 : 2$ и $B_1F : FB = 3 : 7$. Точка T — середина ребра B_1C_1.

   а) Докажите, что плоскость EFT проходит через точку D_1.

   б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT.

2. Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90°$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, K — точка пересечения прямых AB и CD.

   а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.

   б) Найдите объём пирамиды $KBCP$, если $AB = BC = CD = 4$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 9.

3. На ребре SD правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка M, причём $SM : MD = 2 : 1$. Точки P и Q — середины рёбер BC и AD соответственно.

   а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MPQ является равнобедренной трапецией.

   б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK = 1$. Точки M и L — середины рёбер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

   а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

   б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ.

5. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный ($AB = BC$) треугольник ABC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

   а) Докажите, что $KM \perp AC$.

   б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB = 6$, $AC = 8$ и $AA_1 = 3$.

6. Основание пирамиды $PABC$ — правильный треугольник ABC, сторона которого равна 16, боковое ребро PA равно $8\sqrt{3}$. Высота пирамиды PH делит высоту AM треугольника ABC пополам. Через вершину A проведена плоскость, перпендикулярная прямой PM и пересекающая прямую PM в точке K.

   а) Докажите, что плоскость делит высоту PH пирамиды $PABC$ в отношении 2:1, считая от вершины P.

   б) Найдите расстояние между прямыми PH и CK.

7. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно $\sqrt{730}$.

   а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по разные стороны от этой плоскости.

   б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

8. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S боковое ребро вдвое больше стороны основания.

   а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SE и вершину C, делит ребро SB в отношении $3:1$, считая от вершины S.

   б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SE и вершину C, делит ребро SF, считая от вершины S.

9. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S, все рёбра которой равны 4, точка N — середина ребра AC, точка O — центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении $3:1$, считая от вершины пирамиды.

   а) Докажите, что прямая NP перпендикулярна прямой BS.

   б) Найдите расстояние от точки B до прямой NP.

10. В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно $\sqrt{5}$, а высота равна 1, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.)

    а) Докажите, что центр сферы лежит на высоте пирамиды.

    б) Найдите площадь этой сферы.