

СУЩЕСТВОВАНИЕ: Принцип Дирихле

Демонстрационная задача В ряд выписано n натуральных чисел. Докажите, что сумма одного или нескольких рядом стоящих чисел делится на n .

1. Докажите, что в любой компании найдутся два человека, имеющие одинаковое число знакомых в данной компании.
2. В квадрате со стороной 1 отметили 101 точку, причем никакие три точки не лежат на одной прямой. Докажите, что найдется треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого не больше $1/100$.
3. В прямоугольник со сторонами 20 и 25 бросили 120 квадратов со стороной, равной 1. Докажите, что в прямоугольник можно поместить круг диаметра 1, не пересекающийся ни с одним из квадратов.

СУЩЕСТВОВАНИЕ: Непрерывность

Демонстрационная задача Ницше расставил в произвольном порядке 10-томное собрание своих сочинений. Назовем беспорядком пару томов, для которых том с бóльшим номером стоит левее. Каким может быть количество беспорядков в расстановке томов?

1. Матч между двумя футбольными командами закончился со счетом 8 : 5. Докажите, что был момент, когда первая команда забила столько же мячей, сколько второй оставалось забить.
2. Выйдя на маршрут в 4 утра, альпинист к вечеру достиг вершины горы. Переночевав на вершине, на следующий день он вышел в 4 утра и быстро спустился обратно по пути подъёма. Докажите, что на маршруте есть такая точка, которую альпинист во время спуска и во время подъёма проходил в одно и то же время суток.
3. Существуют 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого числа (например, $1001! + 2, 1001! + 3, \dots, 1001! + 1001$). А существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно семь простых чисел?

СУЩЕСТВОВАНИЕ: Принцип Дирихле

Демонстрационная задача В ряд выписано n натуральных чисел. Докажите, что сумма одного или нескольких рядом стоящих чисел делится на n .

1. Докажите, что в любой компании найдутся два человека, имеющие одинаковое число знакомых в данной компании.
2. В квадрате со стороной 1 отметили 101 точку, причем никакие три точки не лежат на одной прямой. Докажите, что найдется треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого не больше $1/100$.
3. В прямоугольник со сторонами 20 и 25 бросили 120 квадратов со стороной, равной 1. Докажите, что в прямоугольник можно поместить круг диаметра 1, не пересекающийся ни с одним из квадратов.

СУЩЕСТВОВАНИЕ: Непрерывность

Демонстрационная задача Ницше расставил в произвольном порядке 10-томное собрание своих сочинений. Назовем беспорядком пару томов, для которых том с бóльшим номером стоит левее. Каким может быть количество беспорядков в расстановке томов?

1. Матч между двумя футбольными командами закончился со счетом 8 : 5. Докажите, что был момент, когда первая команда забила столько же мячей, сколько второй оставалось забить.
2. Выйдя на маршрут в 4 утра, альпинист к вечеру достиг вершины горы. Переночевав на вершине, на следующий день он вышел в 4 утра и быстро спустился обратно по пути подъёма. Докажите, что на маршруте есть такая точка, которую альпинист во время спуска и во время подъёма проходил в одно и то же время суток.
3. Существуют 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого числа (например, $1001! + 2, 1001! + 3, \dots, 1001! + 1001$). А существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно семь простых чисел?