Принцип Дирихле

1. На планете Тау Кита суша занимает больше половины всей площади. Докажите, что таукитяне могут прорыть через центр планеты шахту, соединяющую сушу с сушей.

2. В классе 33 ученика, всем вместе 430 лет. Докажите, что если выбрать 20 самых старших из них, то им вместе будет не меньше, чем 260 лет. (Возраст любого ученика — целое число.)

3. Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

4. В выпуклом четырёхугольнике тангенс одного из углов равен числу m. Могут ли тангенсы каждого из трёх остальных углов также равняться m?

5. (a) В квадрате площади 6 расположены три многоугольника площади 3. Докажите, что среди них найдутся два многоугольника, площадь общей части которых не меньше 1.

   (b) В квадрате площади 5 расположено девять многоугольников площади 1. Докажите, что среди них найдутся два многоугольника, площадь общей части которых не меньше 1/9.

6. В 25 коробках лежат шарики нескольких цветов. Известно, что при любом k ($1 \le k \le 25$) в любых k коробках лежат шарики ровно $k+1$ различных цветов. Докажите, что шарики какого-то из цветов лежат во всех коробках.

7. В выпуклом многоугольнике на плоскости содержится не меньше m^2+1 точек с целыми координатами. Докажите, что в нем найдётся $m+1$ точек с целыми координатами, которые лежат на одной прямой.

8. Имеется таблица $n \times n$, в $n-1$ клетках которой записаны единицы, а в остальных клетках — нули. С таблицей разрешается проделывать следующую операцию: выбрать клетку, вычесть из числа, стоящего в этой клетке, единицу, а ко всем числам, стоящим в одной строке с выбранной клеткой, а также ко всем числам, стоящим в одном столбце с выбранной клеткой, прибавить единицу. Можно ли из этой таблицы с помощью указанных операций получить таблицу, в которой все числа равны?

Принцип Дирихле

1. На планете Тау Кита суша занимает больше половины всей площади. Докажите, что таукитяне могут прорыть через центр планеты шахту, соединяющую сушу с сушей.

2. В классе 33 ученика, всем вместе 430 лет. Докажите, что если выбрать 20 самых старших из них, то им вместе будет не меньше, чем 260 лет. (Возраст любого ученика — целое число.)

3. Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

4. В выпуклом четырёхугольнике тангенс одного из углов равен числу m. Могут ли тангенсы каждого из трёх остальных углов также равняться m?

5. (a) В квадрате площади 6 расположены три многоугольника площади 3. Докажите, что среди них найдутся два многоугольника, площадь общей части которых не меньше 1.

   (b) В квадрате площади 5 расположено девять многоугольников площади 1. Докажите, что среди них найдутся два многоугольника, площадь общей части которых не меньше 1/9.

6. В 25 коробках лежат шарики нескольких цветов. Известно, что при любом k $(1 \le k \le 25)$ в любых k коробках лежат шарики ровно $k+1$ различных цветов. Докажите, что шарики какого-то из цветов лежат во всех коробках.

7. В выпуклом многоугольнике на плоскости содержится не меньше m^2+1 точек с целыми координатами. Докажите, что в нем найдётся $m+1$ точек с целыми координатами, которые лежат на одной прямой.

8. Имеется таблица $n \times n$, в $n-1$ клетках которой записаны единицы, а в остальных клетках — нули. С таблицей разрешается проделывать следующую операцию: выбрать клетку, вычесть из числа, стоящего в этой клетке, единицу, а ко всем числам, стоящим в одной строке с выбранной клеткой, а также ко всем числам, стоящим в одном столбце с выбранной клеткой, прибавить единицу. Можно ли из этой таблицы с помощью указанных операций получить таблицу, в которой все числа равны?