

# Поворотная гомотетия

! *Поворотная гомотетия* — композиция поворота и гомотетии с общим центром, т.е.

$$\mathcal{R}_O^\varphi \circ \mathcal{H}_O^k .$$

1. Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок  $AB$  в отрезок  $CD$ , является также центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок  $AC$  в отрезок  $BD$ .
2. По двум пересекающимся прямым с постоянными, но не равными скоростями движутся точки  $A$  и  $B$ . Докажите, что существует такая точка  $P$ , что в любой момент времени  $AP : BP = k$ , где  $k$  — отношение скоростей.
3. На плоскости даны две неконцентрические окружности. Постройте центр и найдите коэффициент поворотной гомотетии с углом  $90^\circ$ , переводящей одну из окружностей в другую.
4. (а) Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрали произвольно точку  $X$  и продолжили прямую  $XB$  до пересечения со второй окружностью в точке  $Y$ . Докажите, что градусные меры дуг  $XA$  и  $YA$  равны.  
(б) На плоскости даны два квадрата  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$  такие, что  $D = D'$ , точка  $C$  лежит на отрезке  $A'D$ , а точки  $B$  и  $B'$  по разные стороны от прямой  $A'D$ . Докажите, что прямые  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  пересекаются в одной точке.  
(с) Окружности  $\Omega_1, \dots, \Omega_n$  проходят через точку  $O$ . Кузнечик из точки  $X_i$  окружности  $\Omega_i$  прыгает в точку  $X_{i+1}$  окружности  $\Omega_{i+1}$  так, что прямая  $X_i X_{i+1}$  проходит через точку пересечения окружностей  $\Omega_i$  и  $\Omega_{i+1}$ , отличную от точки  $O$ . Докажите, что после  $n$  прыжков (с окружности  $\Omega_1$  на  $\Omega_2$ , с  $\Omega_2$  на  $\Omega_3$ , ..., с  $\Omega_n$  на  $\Omega_1$ ) кузнечик вернётся в исходную точку.

# Поворотная гомотетия

! *Поворотная гомотетия* — композиция поворота и гомотетии с общим центром, т.е.

$$\mathcal{R}_O^\varphi \circ \mathcal{H}_O^k .$$

1. Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок  $AB$  в отрезок  $CD$ , является также центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок  $AC$  в отрезок  $BD$ .
2. По двум пересекающимся прямым с постоянными, но не равными скоростями движутся точки  $A$  и  $B$ . Докажите, что существует такая точка  $P$ , что в любой момент времени  $AP : BP = k$ , где  $k$  — отношение скоростей.
3. На плоскости даны две неконцентрические окружности. Постройте центр и найдите коэффициент поворотной гомотетии с углом  $90^\circ$ , переводящей одну из окружностей в другую.
4. (а) Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрали произвольно точку  $X$  и продолжили прямую  $XB$  до пересечения со второй окружностью в точке  $Y$ . Докажите, что градусные меры дуг  $XA$  и  $YA$  равны.  
(б) На плоскости даны два квадрата  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$  такие, что  $D = D'$ , точка  $C$  лежит на отрезке  $A'D$ , а точки  $B$  и  $B'$  по разные стороны от прямой  $A'D$ . Докажите, что прямые  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  пересекаются в одной точке.  
(с) Окружности  $\Omega_1, \dots, \Omega_n$  проходят через точку  $O$ . Кузнечик из точки  $X_i$  окружности  $\Omega_i$  прыгает в точку  $X_{i+1}$  окружности  $\Omega_{i+1}$  так, что прямая  $X_i X_{i+1}$  проходит через точку пересечения окружностей  $\Omega_i$  и  $\Omega_{i+1}$ , отличную от точки  $O$ . Докажите, что после  $n$  прыжков (с окружности  $\Omega_1$  на  $\Omega_2$ , с  $\Omega_2$  на  $\Omega_3$ , ..., с  $\Omega_n$  на  $\Omega_1$ ) кузнечик вернётся в исходную точку.