Малая теорема Ферма, теорема Эйлера

!! **Малая теорема Ферма.**

Если $p \in \mathbb{P}$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \not\vdots\, p$, то $a^{p-1} \equiv_p 1$.

1. (a) Какой остаток даёт 3^{2017} при делении на 13?
   (b) Какой остаток даёт 5^{1001} при делении на 11?
   (c) Какой остаток даёт 11^{11} при делении на 12?
   (d) Какой остаток даёт 6^{500} при делении на 72?

2. Целые числа a, b, c, d, e, f таковы, что $a^{12} + b^{12} + c^{12} + d^{12} + e^{12} + f^{12} \vdots 13$. Докажите, что $abcdef \vdots 13^6$.

3. (a) Докажите, что для любых $p \in \mathbb{P}$ и $a \in \mathbb{Z}$ справедливо $a^p \equiv_p a$.
   (b) Даны $q, r \in \mathbb{P}$, $q \neq r$. Докажите, что $q^r + r^q \equiv_{qr} q + r$.
   (c) Сумма трёх чисел a, b и c делится на 30. Докажите, что $a^5 + b^5 + c^5$ также делится на 30.

4. Пусть $p \in \mathbb{P}$. Докажите, что $(b + c)^p \equiv_p b^p + c^p$ для любых $b, c \in \mathbb{Z}$.

5. (a) Даны $b, k, \ell \in \mathbb{N}$, причём $b > 1$. Докажите, что $(b^k - 1, b^\ell - 1) = b^{(k,\ell)} - 1$.
   (b) Дано простое $p > 3$. Положим $n = \dfrac{2^{2p} - 1}{3}$. Докажите, что $2^n - 2 \vdots n$.

! *Функция Эйлера* $\varphi(n)$ равна количеству натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с ним.

6. Пусть $n = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\gamma_k}$ — разложение числа n на простые множители. Докажите, что $\varphi(n) = n\left(1 - \dfrac{1}{p_1}\right)\left(1 - \dfrac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{1}{p_k}\right)$.

!! **Теорема Эйлера.**

Если $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \perp n$, то $a^{\varphi(n)} \equiv_n 1$.

(*Обобщение малой теоремы Ферма на составные числа.*)

7. (a) Найдите остаток от деления 7^{120} на 143.
   (b) Найдите три последние цифры числа $17^{1000001}$.

8. Докажите, что для любого натурального n, взаимно простого с 10, найдётся натуральное k такое, что $nk = 11...1$.

Малая теорема Ферма, теорема Эйлера

!! **Малая теорема Ферма.**

Если $p \in \mathbb{P}$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \not\vdots\, p$, то $a^{p-1} \equiv_p 1$.

1. (a) Какой остаток даёт 3^{2017} при делении на 13?
   (b) Какой остаток даёт 5^{1001} при делении на 11?
   (c) Какой остаток даёт 11^{11} при делении на 12?
   (d) Какой остаток даёт 6^{500} при делении на 72?

2. Целые числа a, b, c, d, e, f таковы, что $a^{12} + b^{12} + c^{12} + d^{12} + e^{12} + f^{12} \vdots 13$. Докажите, что $abcdef \vdots 13^6$.

3. (a) Докажите, что для любых $p \in \mathbb{P}$ и $a \in \mathbb{Z}$ справедливо $a^p \equiv_p a$.
   (b) Даны $q, r \in \mathbb{P}$, $q \neq r$. Докажите, что $q^r + r^q \equiv_{qr} q + r$.
   (c) Сумма трёх чисел a, b и c делится на 30. Докажите, что $a^5 + b^5 + c^5$ также делится на 30.

4. Пусть $p \in \mathbb{P}$. Докажите, что $(b + c)^p \equiv_p b^p + c^p$ для любых $b, c \in \mathbb{Z}$.

5. (a) Даны $b, k, \ell \in \mathbb{N}$, причём $b > 1$. Докажите, что $(b^k - 1, b^\ell - 1) = b^{(k,\ell)} - 1$.
   (b) Дано простое $p > 3$. Положим $n = \dfrac{2^{2p} - 1}{3}$. Докажите, что $2^n - 2 \vdots n$.

! *Функция Эйлера* $\varphi(n)$ равна количеству натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с ним.

6. Пусть $n = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\gamma_k}$ — разложение числа n на простые множители. Докажите, что $\varphi(n) = n\left(1 - \dfrac{1}{p_1}\right)\left(1 - \dfrac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \dfrac{1}{p_k}\right)$.

!! **Теорема Эйлера.**

Если $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \perp n$, то $a^{\varphi(n)} \equiv_n 1$.

(*Обобщение малой теоремы Ферма на составные числа.*)

7. (a) Найдите остаток от деления 7^{120} на 143.
   (b) Найдите три последние цифры числа $17^{1000001}$.

8. Докажите, что для любого натурального n, взаимно простого с 10, найдётся натуральное k такое, что $nk = 11...1$.