Линейные диофантовы уравнения

0. Решите в целых числах уравнение $5x + 3y = 7$.

!! Линейное представление НОД.

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$ (a и b не равны 0 одновременно) $\quad \exists k, m \in \mathbb{Z} \quad (a, b) = ak + bm$

!! Критерий разрешимости линейного диофантова уравнения.

Линейное диофантово уравнение с двумя неизвестными

$$ax + by = c$$

имеет решение тогда и только тогда, когда

$$c \,\vdots\, (a, b).$$

Решение имеет вид $\quad x = x_0 + \dfrac{b}{(a,b)} \cdot w, \quad y = y_0 - \dfrac{a}{(a,b)} \cdot w, \quad w \in \mathbb{Z}$.

1. Решите в $\mathbb{Z}$ уравнения
   (a) $2x + 3y = 7$; (b) $6x - 9y = 11$; (c) $-21x - 35y = 14$.

2. Докажите, что уравнение $ax + by = c$ имеет решение в целых числах тогда и только тогда, когда уравнение $ax + by = c - 2a - 3b$ имеет решение в целых числах.

3. Сколько существует пар (s, t) таких, что $5s + 9t = 7$ и $|2s - 3t| < 100$?

4. Сколько решений уравнения $60^\alpha \cdot \left(\dfrac{500}{3}\right)^\beta \cdot 360^\gamma = 12960$ удовлетворяет условию $|\alpha + \beta + \gamma| < 71$?

5. Решите уравнение $\sin^2\left(4z + \dfrac{3\pi}{5}\right) + \cos^2\left(5z - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

   Сколько решений этого уравнения принадлежат промежутку $[0, 1000\pi)$?

6. При каких $a, b \in \mathbb{Z}$ система $\begin{cases} ax + 2y = 1, \\ bx + 3y = 1, \end{cases}$ имеет решение $x, y \in \mathbb{Z}$?

7. Какие значения может принимать выражение $35u - 21v$ при целых u и v?

8. При каких целых n сократима дробь $\dfrac{4n+5}{7n+3}$?

9. Каким может быть $(3m - k, 5k + 2m)$, если известно, что числа m и k взаимно просты?

10. Решите в $\mathbb{Z}$ уравнение $2x + 3y + 5z = 11$.

Линейные диофантовы уравнения

0. Решите в целых числах уравнение $5x + 3y = 7$.

!! Линейное представление НОД.

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$ (a и b не равны 0 одновременно) $\quad \exists k, m \in \mathbb{Z} \quad (a, b) = ak + bm$

!! Критерий разрешимости линейного диофантова уравнения.

Линейное диофантово уравнение с двумя неизвестными

$$ax + by = c$$

имеет решение тогда и только тогда, когда

$$c \,\vdots\, (a, b).$$

Решение имеет вид $\quad x = x_0 + \dfrac{b}{(a,b)} \cdot w, \quad y = y_0 - \dfrac{a}{(a,b)} \cdot w, \quad w \in \mathbb{Z}$.

1. Решите в $\mathbb{Z}$ уравнения
(a) $2x + 3y = 7$; (b) $6x - 9y = 11$; (c) $-21x - 35y = 14$.

2. Докажите, что уравнение $ax + by = c$ имеет решение в целых числах тогда и только тогда, когда уравнение $ax + by = c - 2a - 3b$ имеет решение в целых числах.

3. Сколько существует пар (s, t) таких, что $5s + 9t = 7$ и $|2s - 3t| < 100$?

4. Сколько решений уравнения $60^{\alpha} \cdot \left(\dfrac{500}{3}\right)^{\beta} \cdot 360^{\gamma} = 12960$ удовлетворяет условию $|\alpha + \beta + \gamma| < 71$?

5. Решите уравнение $\sin^2\left(4z + \dfrac{3\pi}{5}\right) + \cos^2\left(5z - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.
Сколько решений этого уравнения принадлежат промежутку $[0, 1000\pi)$?

6. При каких $a, b \in \mathbb{Z}$ система $\begin{cases} ax + 2y = 1, \\ bx + 3y = 1, \end{cases}$ имеет решение $x, y \in \mathbb{Z}$?

7. Какие значения может принимать выражение $35u - 21v$ при целых u и v?

8. При каких целых n сократима дробь $\dfrac{4n + 5}{7n + 3}$?

9. Каким может быть $(3m - k, 5k + 2m)$, если известно, что числа m и k взаимно просты?

10. Решите в $\mathbb{Z}$ уравнение $2x + 3y + 5z = 11$.