

## ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ: ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ

1. При каких  $a, b \in \mathbb{Z}$  система 
$$\begin{cases} ax + 2y = 1, \\ bx + 3y = 1, \end{cases}$$
 имеет решение  $x, y \in \mathbb{Z}$ ?
2. Найдите все  $k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P}$  такие, что  $3p + 1 = k^3$
3. Решите в  $\mathbb{Z}$  уравнение  $x^3 = 2^y + 1$ .
4. Найдите все  $m, n \in \mathbb{N}$ , удовлетворяющие соотношению  $m! + 12 = n^2$ .
5. Найдите все пары натуральных чисел, сумма четвёртых степеней которых является квадратом натурального числа.
6. Сколько решений уравнения  $60^\alpha \cdot \left(\frac{500}{3}\right)^\beta \cdot 360^\gamma = 12960$  удовлетворяет условию  $|\alpha + \beta + \gamma| < 71$ ?
7. Решите уравнение  $\sin^2\left(4z + \frac{3\pi}{5}\right) + \cos^2\left(5z - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ .  
Сколько решений этого уравнения принадлежат промежутку  $[0, 1000\pi)$ ?
8. Докажите, что если числа  $n$  и  $m$  являются периодами некоторой последовательности, то и  $(m, n)$  является периодом этой последовательности.
9. Докажите, что если  $(a, b, c) = 1$ , то уравнение  $ax + by + cz = 1$  разрешимо в целых числах  $x, y, z$ .
10. Пусть  $a, b, c$  — такие целые неотрицательные числа, что  $28a + 30b + 31c = 365$ . Докажите, что  $a + b + c = 12$ .
11. Решите в  $\mathbb{Z}$  уравнение  $xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x) = 6$ .
12. При каких натуральных  $n$  число  $n^4 + 4$  является простым?
13. Решите в  $\mathbb{N}$  систему 
$$\begin{cases} a^3 + 6ab + 1 = n^3 \\ b^3 + 6ab + 1 = m^3 \end{cases}$$
.
14. Рассмотрим для  $k, n \in \mathbb{N}$  и  $p \in \mathbb{P}$  уравнение  $2^k + 1 = p^n$ .
  - а) Решите его при условии  $n > 1$ .
  - б) Докажите, что если  $n = 1$ , то  $k = 2^m$ .
15. Решите в  $\mathbb{Z}$  уравнение  $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ .
16. Решите в  $\mathbb{Z}$  уравнение  $2x + 5y = xy - 1$ .
17. Сколько решений в  $\mathbb{N}$  имеет уравнение  $9x^2 - 25y^2 = 2^\alpha 3^\beta 7^\gamma$  в зависимости от натуральных параметров  $\alpha, \beta, \gamma$ ?

## ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ: ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ

1. При каких  $a, b \in \mathbb{Z}$  система 
$$\begin{cases} ax + 2y = 1, \\ bx + 3y = 1, \end{cases}$$
 имеет решение  $x, y \in \mathbb{Z}$ ?
2. Найдите все  $k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P}$  такие, что  $3p + 1 = k^3$
3. Решите в  $\mathbb{Z}$  уравнение  $x^3 = 2^y + 1$ .
4. Найдите все  $m, n \in \mathbb{N}$ , удовлетворяющие соотношению  $m! + 12 = n^2$ .
5. Найдите все пары натуральных чисел, сумма четвёртых степеней которых является квадратом натурального числа.
6. Сколько решений уравнения  $60^\alpha \cdot \left(\frac{500}{3}\right)^\beta \cdot 360^\gamma = 12960$  удовлетворяет условию  $|\alpha + \beta + \gamma| < 71$ ?
7. Решите уравнение  $\sin^2\left(4z + \frac{3\pi}{5}\right) + \cos^2\left(5z - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ .  
Сколько решений этого уравнения принадлежат промежутку  $[0, 1000\pi)$ ?
8. Докажите, что если числа  $n$  и  $m$  являются периодами некоторой последовательности, то и  $(m, n)$  является периодом этой последовательности.
9. Докажите, что если  $(a, b, c) = 1$ , то уравнение  $ax + by + cz = 1$  разрешимо в целых числах  $x, y, z$ .
10. Пусть  $a, b, c$  — такие целые неотрицательные числа, что  $28a + 30b + 31c = 365$ . Докажите, что  $a + b + c = 12$ .
11. Решите в  $\mathbb{Z}$  уравнение  $xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x) = 6$ .
12. При каких натуральных  $n$  число  $n^4 + 4$  является простым?
13. Решите в  $\mathbb{N}$  систему 
$$\begin{cases} a^3 + 6ab + 1 = n^3 \\ b^3 + 6ab + 1 = m^3 \end{cases}$$
.
14. Рассмотрим для  $k, n \in \mathbb{N}$  и  $p \in \mathbb{P}$  уравнение  $2^k + 1 = p^n$ .
  - а) Решите его при условии  $n > 1$ .
  - б) Докажите, что если  $n = 1$ , то  $k = 2^m$ .
15. Решите в  $\mathbb{Z}$  уравнение  $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ .
16. Решите в  $\mathbb{Z}$  уравнение  $2x + 5y = xy - 1$ .
17. Сколько решений в  $\mathbb{N}$  имеет уравнение  $9x^2 - 25y^2 = 2^\alpha 3^\beta 7^\gamma$  в зависимости от натуральных параметров  $\alpha, \beta, \gamma$ ?