

**И поля и горы —
Снег тихонько всё украл...
Сразу стало пусто!**

Дзёсё

1. Дана таблица 3×3 . В четыре случайно выбранные ячейки поставили крестики. Найдите вероятность того, что какие-нибудь три крестика оказались на одной линии (по вертикали, по горизонтали или по диагонали).
2. Имеется 20 человек: 10 юношей и 10 девушек. Сколько существует способов составить компанию, в которой было бы одинаковое число юношей и девушек?
3. Двадцать городов соединены 172 двусторонними авиалиниями. Может ли оказаться, что найдутся два города Ы и Э такие, что, используя эти авиалинии и при необходимости делая пересадки, из Ы нельзя добраться до Э?
4. Докажите, что следующие свойства тетраэдра равносильны:
 - (а) высоты тетраэдра пересекаются в одной точке,
 - (б) суммы квадратов скрещивающихся ребер тетраэдра равны друг другу,
 - (в) бимедианы тетраэдра равны друг другу.

5. Найдите максимальное значение выражения $2x - 3y + 1$, если числа x, y удовлетворяют равенству

$$(x - 7)^2 + (y - 1)^2 = 25 .$$

6. Две параболы с перпендикулярными осями пересекаются в четырех точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности.
7. Найдите все $n \in \mathbb{Z}$, при которых число $\frac{n^4 + n^3 - 8n^2 + n + 1}{n^2 + 1}$ целое.
8. Докажите, что нечетное число, являющееся произведением n различных простых сомножителей, можно представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел ровно 2^{n-1} различными способами.
9. Чему равно произведение

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{225}\right) ?$$

10. Даны попарно различные действительные числа a, b, c, d . Решите уравнение

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{(x-c)(x-d)(x-a)}{(b-c)(b-d)(b-a)} + \frac{(x-d)(x-a)(x-b)}{(c-d)(c-a)(c-b)} = 1.$$

11. Окружности радиусов r_1 и r_2 касаются внешним образом. Третья окружность касается данных окружностей, а также их общей внешней касательной. Найдите ее радиус.
12. Найдите положительные x, y, z , такие что

$$x^2 - y^2 = 144, \quad z^2 - y^2 = 16, \quad xz = 16y.$$