А ну скорее, друзья!
Пойдём по первому снегу бродить,
Пока не свалимся с ног.

Басё

1. В столовой предложено на выбор 6 блюд. Каждый день Вася берет некоторый набор блюд (возможно, не берет ни одного блюда), причем этот набор блюд должен быть отличен от всех наборов, которые он брал в предыдущие дни. Какое наибольшее количество дней Вася сможет питаться по таким правилам и какое количество блюд он в среднем при этом будет съедать за день?

2. Имеется m белых и n черных шаров, причем $m > n$. Сколькими способами можно все шары разложить в ряд так, чтобы никакие два черных шара не лежали рядом?

3. Известно, что в тетраэдре две пары скрещивающихся ребер перпендикулярны. Докажите, что и третья пара скрещивающихся ребер обладает этим свойством.

4. Для каких значений a существует b такое, что $|7a - 3b| \le 1$ и $|5a + 7b| \le 1$?

5. Найдите все положительные значения c, при каждом из которых система
$$\begin{cases} (|x|-4)^2 + (y-4)^2 &= 9 \\ (x+1)^2 + y^2 &= c^2 \end{cases}$$
имеет ровно три решения.

6. Докажите, что число $N_k = (2k)!/k!$ делится на 2^k и не делится на 2^{k+1}.

7. Можно ли расставить в клетках квадрата 8×8 числа от 1 до 64 так, чтобы число в каждой клетке было или меньше всех чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, или больше всех этих чисел?

8. Витя задумал четырехзначное число и написал остатки от деления этого числа на 2, на 3, ..., на 101 (всего 100 остатков). Могло ли среди выписанных чисел оказаться не менее 20 семерок?

9. Даны действительные числа $x, y \in (0,1)$. Докажите, что $\dfrac{x}{1+y} + \dfrac{y}{1+x} < 1$.

10. На множестве действительных чисел задана операция $*$, которая каждым двум числам a и b ставит в соответствие число $a * b$. Известно, что равенство $(a * b) * c = a + b + c$ выполняется для любых трех чисел a, b и c. Докажите, что $a * b = a + b$.

11. Докажите, что если для вписанного четырехугольника $ABCD$ выполнено равенство $CD = AD + BC$, то биссектрисы его углов A и B пересекаются на стороне CD.

12. Положительные числа x, y, z таковы, что
$$x^2 + xy + y^2 = 9, \quad y^2 + yz + z^2 = 16, \quad z^2 + zx + x^2 = 25.$$
Чему равно $xy + yz + zx$?