Комбинаторика

1. **Теорема Кронекера.**

   Если $\gamma > 0$ – иррациональное число, то произвольный интервал (a, b) содержит число вида $n\gamma - m$, где m, n – неотрицательные целые числа.

2. **Теорема Дирихле.**

   Для любых действительных $\gamma_1, ..., \gamma_k$ и натурального N существуют такие целые $m_1, ..., m_k$ и $0 < n \leq N^k$, что $|n\gamma_1 - m_1| \leq \dfrac{1}{N}, \quad \ldots \quad, |n\gamma_k - m_k| \leq \dfrac{1}{N}$.

3. **Теорема Коши-Дэвенпорта.**

   Пусть A и B – два множества вычетов по простому модулю p. Определим $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$. Тогда выполнено $|A+B| > \min\{p, |A|+|B|-1\}$.

4. **Частный случай теоремы Мирского.**

   Из $nk + 1$ отрезков на прямой можно выделить $n + 1$, попарно непересекающихся, либо $k + 1$, имеющих общую точку.

5. **Лемма Минковского.**

   На плоскости дана выпуклая фигура площади с центром симметрии в целой точке. Если площадь фигуры больше 4, то внутри неё есть ещё хотя бы одна целая точка.

6. **Нетранзитивные тройки в турнире.**

   Число нетранзитивных троек в турнире выражается через набор исходящих степеней.

Теория чисел

7. **Критерий Эйлера.**

   Для $p \in \mathbb{P}$ и $t \not\vdots\, p$ справедливо $\left(\dfrac{t}{p}\right) \equiv_p t^{\frac{p-1}{2}}$.

8. **Когда 2 – квадратичный вычет.**

   Вычет 2 является квадратичным вычетом по простому модулю p тогда и только тогда, когда $p \equiv_8 \pm 1$.

9. **Теорема Эрдеша-Гинзбурга-Зива.**

   Из любых $2n - 1$ чисел можно выбрать ровно n с суммой, делящейся на n.

10. **Теорема Ферма-Эйлера.**

    Всякое простое $p \equiv_4 1$ представимо в виде суммы двух квадратов, т.е. найдутся $m, n \in \mathbb{N}$ такие, что $p = m^2 + n^2$.

11. **Суммы двух квадратов.**

    Число представимо в виде суммы двух квадратов, если и только если все нечётные простые числа вида $4k - 1$ входят в его разложение с чётными степенями.

12. **Факториальность $\mathbb{Z}[\mathfrak{i}]$.**

    Любой ненулевой необратимый $w \in \mathbb{Z}[\mathfrak{i}]$ единственным образом (с точностью до перестановки и умножения на обратимые) представляется в виде произведения простых элементов.

Алгебра и геометрия

13. **Лемма о симедиане.**

    Пусть ω – описанная окружность треугольника ABC. Касательные к ω в точках B и C пересекаются в точке D. Тогда прямая AD содержит симедиану треугольника ABC.

14. **Лемма об изогоналях.**

    Внутри угла CDA проведены лучи DN и DM, симметричные относительно биссектрисы этого угла. Пусть P – точка пересечения прямых AN и CM, а Q – точка пересечения прямых CN и AM. Тогда лучи DP и DQ также симметричны относительно биссектрисы угла CDA.

15. **Теорема Гаусса-Люка.**

    Корни производной многочлена с комплексными коэффициентами принадлежат выпуклой оболочке корней самого многочлена.

16. **Многочлены деления круга.**

    Многочлен деления круга $\Phi_n(z)$ имеет целые коэффициенты и при $n \in \mathbb{P}$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

17. **Теорема Мейсона–Стотерса.**

    Попарно взаимно простые многочлены f, g, h из $\mathbb{C}[x]$ таковы, что $f + g = h$. Тогда $\max(\deg f, \deg g, \deg h) \leq n_0(fgh) - 1$.

18. **Инверсия упрощает картинку.**

    Две непересекающиеся окружности (или непересекающиеся окружность и прямую) можно при помощи инверсии перевести в пару концентрических окружностей.

Зачёт, 11-пп, доза № 1

1. Клетки шахматной доски раскрасили ровно в 33 цвета. Пару разных цветов назовем *хорошей*, если можно поставить пару бьющих друг друга коней на клетки этих цветов. Найдите наименьшее возможное число хороших пар.

2. На плоскости даны квадраты $ABCD$ и $KLMN$. Докажите, что середины отрезков AK, BL, CM, DN являются вершинами квадрата.

3. Определите максимальное число k, обладающее следующим свойством: существуют k подряд идущих натуральных чисел, каждое из которых представимо в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

4. Пусть m — натуральное число, P — многочлен. Докажите, что $P(x) \vdots m \ \forall x \in \mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда в представлении $P(x) = a_n C_x^n + a_{n-1} C_x^{n-1} + ... + a_0$ выполнено $a_i \vdots m \ \forall i$.

Зачёт, 11-пп, доза № 2

5. Докажите, что куб натурального числа может начинаться на любую комбинацию цифр.

6. Обозначим через $\sigma(n)$ сумму натуральных делителей числа n. Дано натуральное число $N = 2^r b$, где r и b натуральные числа, причем b нечетно. Известно, что $\sigma(N) = 2N - 1$. Докажите, что числа b и $\sigma(b)$ взаимно просты.

7. Пусть $|x| = |y| = |z| = 1$. Докажите, что $|x + y + z| = |xy + yz + zx|$.

8. Из вершины A параллелограмма $ABCD$ опущены перпендикуляры AM на BC и AN на CD; P -— точка пересечения BN и DM. Докажите, что прямые AP и MN перпендикулярны.

Зачёт, 11-пп, доза № 3

9. Есть $10k$ мудрецов и шляпы k цветов. Мудрецы предварительно посовещались, после чего на каждого надели шляпу определённого цвета. Каждый мудрец видит каждого из остальных, но свою шляпу не видит. Затем мудрецы записывают на бумажке предполагаемый цвет своей шляпы. Докажите, что заведомо 10 мудрецов смогут угадать свой цвет, а вот 11 — вообще говоря, нет.

10. Сколько существует вычетов-соседей, то есть пар подряд идущих квадратичных вычетов?

11. В сегмент, образованный хордой AB окружности ω, вписана окружность γ. Пусть T – середина противоположной дуги окружности ω, и δ – окружность с центром в T, проходящая через A и B. Докажите, что $\delta \perp \gamma$.

12. Докажите, что $\dfrac{\sin\varphi + \sin 3\varphi + ... + \sin(2n-1)\varphi}{\cos\varphi + \cos 3\varphi + ... + \cos(2n-1)\varphi} = \operatorname{tg} n\varphi$.

Зачёт, 11-пп, доза № 4

13. На окружности длины 2013 отмечены 2013 точек, делящих ее на равные дуги. В каждой отмеченной точке стоит фишка. Назовём *расстоянием* между двумя точками длину меньшей дуги между этими точками. При каком наибольшем n можно переставить фишки так, чтобы снова в каждой отмеченной точке было по фишке, а расстояние между любыми двумя фишками, изначально удаленными не более, чем на n, увеличилось?

14. Дан многочлен P с действительными коэффициентами. Оказалось, что уравнение $P(a) + P(b) = 0$ имеет бесконечно много решений в целых числах a и b. Докажите, что у графика $y = P(x)$ есть центр симметрии.

15. Докажите, что простых чисел вида $3k + 1$ бесконечно много.

16. Укажите какой-либо набор коэффиентов $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, при которых отображение $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ биективно переводит множество $\{z : |z - \mathfrak{i}| = \sqrt{2}, z \neq -1\}$ во множество $\{z : |z| = |z - \sqrt{3} - \mathfrak{i}|\}$.

Зачёт, 11-пп, доза № 5

17. Докажите, что сумма квадратов всех натуральных делителей натурального числа n не превосходит $n^2\sqrt{n}$.

18. In acute triangle ABC, segments AD, BE, and CF are its altitudes, and H is its orthocenter. Circle ω, centered at O, passes through A and H and intersects sides AB and AC again at Q and P (other than A), respectively. The circumcircle of triangle OPQ is tangent to segment BC at R. Prove that $CR/BR = ED/FD$.

19. Фокусник и ассистент показывают фокус. Ассистент даёт в распоряжение зрителя шахматную доску. Зритель может перекрасить некоторые клетки и называет ассистенту одну из клеток. После чего ассистент перекрашивает ещё одну клетку. Затем входит фокусник. Он видит только текущее состояние доски. И должен назвать клетку, которую загадал зритель. Придумайте алгоритм, позволяющий ассистенту и фокуснику осуществить задуманное.

20. Для отображения $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ введём обозначение $F^{-1}(c) = \{z \in \mathbb{C} : F(z) = c\}$. О многочленах P, Q известно, что $P^{-1}(0) = Q^{-1}(0)$ и $P^{-1}(1) = Q^{-1}(1)$. Докажите, что $P \equiv Q$.

Зачёт, 11-пп, ЗАПАС

21. Пусть $n > 6$ — совершенное число. Докажите, что степень вхождения в него его наименьшего простого делителя чётна.

22. Докажите, что многочлен $1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + ... + \dfrac{x^n}{n!}$ не имеет кратных корней.

23. Решите уравнение
$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} = 1,$$
где a, b, c — попарно различные вещественные числа.

24. Найдите $(4+7i, 6-7i)$ в $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Представьте числа $4+7i$ и $6-7i$ в виде произведения простых.