

# Теорема Рамсея

1. Собралась компания из 5 человек. Любые двое либо знакомы, либо не знакомы. Можно ли утверждать, что какие-то 3 знакомы друг с другом или какие-то 3 не знакомы друг с другом?
2. Собралась компания из 6 человек. Любые двое либо знакомы, либо не знакомы. Можно ли утверждать, что какие-то 3 знакомы друг с другом или какие-то 3 не знакомы друг с другом?

**Число Рамсея** Так и запишем:  $\mathcal{R}(3, 3) = 6$ .

3. Собралась компания из 8 человек. Любые двое либо знакомы, либо не знакомы. Можно ли утверждать, что какие-то 3 знакомы друг с другом или какие-то 4 не знакомы друг с другом?
4. Собралась компания из 9 человек. Любые двое либо знакомы, либо не знакомы. Можно ли утверждать, что какие-то 3 знакомы друг с другом или какие-то 4 не знакомы друг с другом?

**Число Рамсея** Так и запишем:  $\mathcal{R}(3, 4) = 9$ .

5. Укажите какое-либо число людей, при котором можно гарантировать, что найдутся 4 знакомых друг с другом или 4 не знакомых друг с другом людей.
6. **И что — так будет всегда?**

Для любых  $a, b$  найдётся число  $\mathcal{R}(a, b)$  такое, что в любой компании из  $n \geq \mathcal{R}(a, b)$  человек найдутся либо  $a$  человек, которые попарно знакомы, либо  $b$  человек, которые попарно незнакомы.

**Подсказка:** поможет оценка  $\mathcal{R}(a, b) \leq \mathcal{R}(a - 1, b) + \mathcal{R}(a, b - 1)$ .

7. **Как обстоят дела с бесконечностью?**

Собралась компания из бесконечного числа людей. Любые двое либо знакомы, либо не знакомы. Докажите, что найдётся бесконечное подмножество людей, которые все знакомы друг с другом или все не знакомы друг с другом.

8. **Что если несколько типов связей?**

17 ученых переписываются по математике, физике, биологии. При этом любая пара ученых переписывается ровно по одной дисциплине. Можно ли утверждать, что можно выбрать 3 ученых, которые переписываются по какой-то одной дисциплине?

9. **Что если несколько типов связей?**

16 ученых переписываются по математике, физике, биологии. При этом любая пара ученых переписывается ровно по одной дисциплине. Можно ли утверждать,

что можно выбрать 3 ученых, которые переписываются по какой-то одной дисциплине?

**Число Рамсея** Так и запишем:  $\mathcal{R}(3, 3, 3) = 17$ .

#### 10. А так будет всегда?

Для любых  $a, b, c, \dots$  найдётся число  $\mathcal{R}(a, b, c, \dots)$  такое, что в любой компании из  $n \geq \mathcal{R}(a, b, c, \dots)$  учёных найдутся...

...  $a$  учёных, которые попарно переписываются по первой дисциплине,...

... или  $b$  учёных, которые попарно переписываются по второй дисциплине,...

... или  $c$  учёных, которые попарно переписываются по третьей дисциплине,...

итд.

*Подсказка: поможет оценка*

$$\mathcal{R}(a, b, c, \dots) \leq \mathcal{R}(a-1, b, c, \dots) + \mathcal{R}(a, b-1, c, \dots) + \mathcal{R}(a, b, c-1, \dots) + \dots$$

#### 11. Как обстоят дела с бесконечностью?

Бесконечное число учёных попарно переписываются по конечному числу дисциплин. Докажите, что найдётся бесконечное подмножество учёных, любые два из которых переписываются по какой-то одной и той же дисциплине.

#### 12. А что дальше?

Вместо пар — тройки, четвёрки, ...

#### **Теорема Эрдёша–Секереша–Клейн**

Каким бы ни было число  $n$ , среди достаточно большого количества точек общего положения на плоскости обязательно найдётся выпуклый  $n$ -угольник.

# Теорема Рамсея

1. Собралась компания из 5 человек. Любые двое либо знакомы, либо не знакомы. Можно ли утверждать, что какие-то 3 знакомы друг с другом или какие-то 3 не знакомы друг с другом?
2. Собралась компания из 6 человек. Любые двое либо знакомы, либо не знакомы. Можно ли утверждать, что какие-то 3 знакомы друг с другом или какие-то 3 не знакомы друг с другом?

**Число Рамсея** Так и запишем:  $\mathcal{R}(3, 3) = 6$ .

3. Собралась компания из 8 человек. Любые двое либо знакомы, либо не знакомы. Можно ли утверждать, что какие-то 3 знакомы друг с другом или какие-то 4 не знакомы друг с другом?
4. Собралась компания из 9 человек. Любые двое либо знакомы, либо не знакомы. Можно ли утверждать, что какие-то 3 знакомы друг с другом или какие-то 4 не знакомы друг с другом?

**Число Рамсея** Так и запишем:  $\mathcal{R}(3, 4) = 9$ .

5. Укажите какое-либо число людей, при котором можно гарантировать, что найдутся 4 знакомых друг с другом или 4 не знакомых друг с другом людей.
6. **И что — так будет всегда?**

Для любых  $a, b$  найдётся число  $\mathcal{R}(a, b)$  такое, что в любой компании из  $n \geq \mathcal{R}(a, b)$  человек найдутся либо  $a$  человек, которые попарно знакомы, либо  $b$  человек, которые попарно незнакомы.

**Подсказка:** поможет оценка  $\mathcal{R}(a, b) \leq \mathcal{R}(a - 1, b) + \mathcal{R}(a, b - 1)$ .

7. **Как обстоят дела с бесконечностью?**

Собралась компания из бесконечного числа людей. Любые двое либо знакомы, либо не знакомы. Докажите, что найдётся бесконечное подмножество людей, которые все знакомы друг с другом или все не знакомы друг с другом.

8. **Что если несколько типов связей?**

17 ученых переписываются по математике, физике, биологии. При этом любая пара ученых переписывается ровно по одной дисциплине. Можно ли утверждать, что можно выбрать 3 ученых, которые переписываются по какой-то одной дисциплине?

9. **Что если несколько типов связей?**

16 ученых переписываются по математике, физике, биологии. При этом любая пара ученых переписывается ровно по одной дисциплине. Можно ли утверждать,

что можно выбрать 3 ученых, которые переписываются по какой-то одной дисциплине?

**Число Рамсея** Так и запишем:  $\mathcal{R}(3, 3, 3) = 17$ .

#### 10. А так будет всегда?

Для любых  $a, b, c, \dots$  найдётся число  $\mathcal{R}(a, b, c, \dots)$  такое, что в любой компании из  $n \geq \mathcal{R}(a, b, c, \dots)$  учёных найдутся...

...  $a$  учёных, которые попарно переписываются по первой дисциплине,...

... или  $b$  учёных, которые попарно переписываются по второй дисциплине,...

... или  $c$  учёных, которые попарно переписываются по третьей дисциплине,...

итд.

*Подсказка: поможет оценка*

$$\mathcal{R}(a, b, c, \dots) \leq \mathcal{R}(a-1, b, c, \dots) + \mathcal{R}(a, b-1, c, \dots) + \mathcal{R}(a, b, c-1, \dots) + \dots$$

#### 11. Как обстоят дела с бесконечностью?

Бесконечное число учёных попарно переписываются по конечному числу дисциплин. Докажите, что найдётся бесконечное подмножество учёных, любые два из которых переписываются по какой-то одной и той же дисциплине.

#### 12. А что дальше?

Вместо пар — тройки, четвёрки, ...

#### **Теорема Эрдёша–Секереша–Клейн**

Каким бы ни было число  $n$ , среди достаточно большого количества точек общего положения на плоскости обязательно найдётся выпуклый  $n$ -угольник.