Алгебра комплексных чисел

1. Число w называется *примитивным корнем из 1 степени* n, если $w^n = 1$, но $w^k \neq 1$ для всех $k < n$ ($k \in \mathbb{N}$). Многочлен

$$\Phi_n(z) = \prod_{w\text{ -- примитивный степени } n} (z - w)$$

называется *многочленом деления круга.*

(a) Какова степень $\Phi_n(z)$?

(b) Докажите, что $\Phi_n \in \mathbb{Z}[z]$.

(c) $\Phi_n(z)$ неприводим над $\mathbb{Z}$. Докажите это для простого n.

2. Вычислите суммы

(a) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + ...$

(b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + ...$

(c) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + ...$

(d) $C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + ...$

3. Даны многочлены

$$f(x) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 \quad \text{и} \quad g(x) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + ... + b_1 z + b_0$$

с комплексными коэффициентами. Корни первого — $z_1, ..., z_n$, корни второго — $z_1^2, ..., z_n^2$. Известно, что $a_0 + a_2 + ...$ и $a_1 + a_3 + ...$ — действительные числа. Докажите, что $b_0 + b_1 + ...$ — действительное число.

4. **Теорема Гаусса-Люка.**

Докажите, что корни производной любого многочлена с комплексными коэффициентами принадлежат выпуклой оболочке корней самого многочлена.

5. Многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами принимает неотрицательные значения при всех действительных значениях x. Докажите, что существуют такие многочлены с вещественными коэффициентами $Q(x)$ и $R(x)$, что выполнено $P(x) = Q(x)^2 + R(x)^2$.

6. Обозначим за $n_0(p)$ число различных корней многочлена p с комплексными коэффициентами. Докажите, что $n_0(p) = \deg p - \deg(p, p')$.

7. **Теорема Мейсона–Стотерса.**

Пусть взаимно простые многочлены f, g, h из $\mathbb{C}[x]$ таковы, что $f + g = h$.

(a) Докажите, что $f'g - fg' = f'h - fh'$.

(b) Докажите, что $\max(\deg f, \deg g, \deg h) \leq n_0(fgh) - 1$.

8. **ВТФ для многочленов.**

Докажите, что уравнение $x(t)^n + y(t)^n = z(t)^n$ ($n \geq 3$) не имеет решений, в которых многочлены взаимно просты и хотя бы один из них — не константа.

Алгебра комплексных чисел

1. Число w называется *примитивным корнем из 1 степени* n, если $w^n = 1$, но $w^k \neq 1$ для всех $k < n$ $(k \in \mathbb{N})$. Многочлен

$$\Phi_n(z) = \prod_{w\text{ — примитивный степени } n} (z - w)$$

называется *многочленом деления круга.*

(a) Какова степень $\Phi_n(z)$?

(b) Докажите, что $\Phi_n \in \mathbb{Z}[z]$.

(c) $\Phi_n(z)$ неприводим над $\mathbb{Z}$. Докажите это для простого n.

2. Вычислите суммы

(a) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + ...$

(b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + ...$

(c) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + ...$

(d) $C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + ...$

3. Даны многочлены

$$f(x) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 \quad \text{и} \quad g(x) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + ... + b_1 z + b_0$$

с комплексными коэффициентами. Корни первого — $z_1, ..., z_n$, корни второго — $z_1^2, ..., z_n^2$. Известно, что $a_0 + a_2 + ...$ и $a_1 + a_3 + ...$ — действительные числа. Докажите, что $b_0 + b_1 + ...$ — действительное число.

4. **Теорема Гаусса-Люка.**

Докажите, что корни производной любого многочлена с комплексными коэффициентами принадлежат выпуклой оболочке корней самого многочлена.

5. Многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами принимает неотрицательные значения при всех действительных значениях x. Докажите, что существуют такие многочлены с вещественными коэффициентами $Q(x)$ и $R(x)$, что выполнено $P(x) = Q(x)^2 + R(x)^2$.

6. Обозначим за $n_0(p)$ число различных корней многочлена p с комплексными коэффициентами. Докажите, что $n_0(p) = \deg p - \deg(p, p')$.

7. **Теорема Мейсона–Стотерса.**

Пусть взаимно простые многочлены f, g, h из $\mathbb{C}[x]$ таковы, что $f + g = h$.

(a) Докажите, что $f'g - fg' = f'h - fh'$.

(b) Докажите, что $\max(\deg f, \deg g, \deg h) \leq n_0(fgh) - 1$.

8. **ВТФ для многочленов.**

Докажите, что уравнение $x(t)^n + y(t)^n = z(t)^n$ $(n \geq 3)$ не имеет решений, в которых многочлены взаимно просты и хотя бы один из них — не константа.