

Учебные задачи, 08 кл, теория чисел

Простые вида $6m + 5$

Докажите, что бесконечно много простых чисел дают остаток 5 при делении на 6.

Не бывает целым

Докажите, что ни при каком $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$) число $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ не является целым.

Две головы лучше

Найдутся ли такие 50 натуральных чисел, что ни одно из них не делится на другое, а произведение каждых двух из них делится на любое из оставшихся чисел?

Три числа, три пары, три делимости

Найдите все тройки натуральных чисел, больших единицы, такие что произведение любых двух из этих чисел, увеличенное на 1, делится на третье.

Заключительные этапы, 08 кл, теория чисел

zakl2009, 08.2, Шаповалов

При всяком ли натуральном n , большем 2009, из дробей $\frac{1}{n}, \frac{2}{n-1}, \frac{3}{n-2}, \dots, \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1}$ можно выбрать две пары дробей с одинаковыми суммами?

zakl2009, 08.5, Женодаров

Можно ли в выражении $\text{НОК}(*,*,*) - \text{НОК}(*,*,*) = 2009$ вместо звёздочек вставить в некотором порядке шесть последовательных натуральных чисел так, чтобы равенство стало верным?

zakl2009, 08.8, Богданов

Бесконечная последовательность чисел начинается с единицы, а каждое следующее число получается из предыдущего прибавлением к нему наименьшей ненулевой цифры его десятичной записи. Сколько знаков в десятичной записи числа, стоящего в этом ряду на $9 \cdot 1000^{1000}$ -ом месте?

zakl2011, 08.5, Волчёнков

100 идущих подряд натуральных чисел отсортировали по возрастанию суммы цифр, а числа с одинаковой суммой цифр — просто по возрастанию. Могли ли числа 2010 и 2011 оказаться рядом?

zakl2011, 08.7, Богданов

По окружности записали красным пять несократимых дробей с нечётными знаменателями, большими 10^{10} . Между каждыми двумя соседними красными дробями вписали синим несократимую запись их суммы. Могло ли случиться, что у синих дробей все знаменатели меньше 100?

zakl2012, 08.2, Дмитриев+Женодаров

Олег и Роман по очереди выписывают слева направо по одной цифре, пока не получится девятизначное число. При этом нельзя выписывать цифры, которые уже выписаны. Начинает Олег. Олег побеждает, если полученное число кратно 4, в противном случае побеждает Роман. Кто победит при правильной игре?

zakl2012, 08.5, Храмцов

Можно ли расставить на рёбрах куба 12 натуральных чисел так, чтобы суммы чисел на любых двух противоположных гранях отличались ровно на единицу?

zakl2012, 08.6, Голованов

Существуют ли различные $a, b, c \in \mathbb{N}$ такие, что $a + \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} \right)$?