

ЛШ Фоксфорда в Болгарии 2017: Контрольная работа

7-8 класс

1. Из жизни остатков.

- (a) Решите в целых числах уравнение $5x + 17z = 1$.
(b) Решите в целых числах уравнение $7y + 15t = 1$.

2. Теория графов.

- (a) Связный граф из 22 вершин степени 3 каждая нарисован на плоскости без самопересечений. Сколько у него рёбер? Сколько у него граней?
(b) Связный граф из 20 вершин степени 3 каждая нарисован на плоскости без самопересечений. Сколько у него рёбер? Сколько у него граней?

3. Геометрические места точек.

- (a) Дан квадрат $ABCD$.
Найдите все точки X такие, что $S_{AXB} = S_{CXD}$ и $\angle BXC = 45^\circ$.
(b) Дан квадрат $PQRS$.
Найдите все точки X такие, что $S_{PXQ} = S_{QXR}$ и $\angle SXQ = 45^\circ$.

4. Клетчатые конструктивы.

- (a) Отметьте центры как можно большего числа клеток доски 8×8 так, чтобы никакие три отмеченные точки не лежали на одной прямой.
(b) На доске 5×5 проведите как можно больше диагоналей клеток так, чтобы никакие две диагонали не имели общих точек (включая концы).

5. Линейное с параметрами.

- (a) В зависимости от α определите число решений уравнения $x + \alpha = |x - 2| + 3$.
(b) В зависимости от β определите число решений уравнения $x - \beta = |x + 3| - 2$.

6. Математическая индукция.

- (a) Докажите для $n \in \mathbb{N}$ тождество $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1) = n^2$.
(b) Докажите для $n \in \mathbb{N}$ тождество $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$.

7. Дополнительная задача.

Какое наименьшее значение может принимать выражение $s^3 + \frac{48}{s}$ при положительных s ?

* Каждая задача оценивается в 0, 1, 2, 3 или 4 балла. *

Гарантируемые нижние границы оценок:

было ↓	будет →	«5» за к/р	«4» за к/р	«3» за к/р	«2» за к/р
за коллоквиум «5»		22 балла	18 баллов	14 баллов	10 баллов
за коллоквиум «4»		18 баллов	14 баллов	10 баллов	6 баллов
за коллоквиум «3»		14 баллов	10 баллов	6 баллов	2 балла

ЛШ Фоксфорда в Болгарии 2017: Контрольная работа

7-8 класс

1. Из жизни остатков.

- (a) Решите в целых числах уравнение $5x + 17z = 1$.
(b) Решите в целых числах уравнение $7y + 15t = 1$.

2. Теория графов.

- (a) Связный граф из 22 вершин степени 3 каждая нарисован на плоскости без самопересечений. Сколько у него рёбер? Сколько у него граней?
(b) Связный граф из 20 вершин степени 3 каждая нарисован на плоскости без самопересечений. Сколько у него рёбер? Сколько у него граней?

3. Геометрические места точек.

- (a) Дан квадрат $ABCD$.
Найдите все точки X такие, что $S_{AXB} = S_{CXD}$ и $\angle BXC = 45^\circ$.
(b) Дан квадрат $PQRS$.
Найдите все точки X такие, что $S_{PXQ} = S_{QXR}$ и $\angle SXQ = 45^\circ$.

4. Клетчатые конструктивы.

- (a) Отметьте центры как можно большего числа клеток доски 8×8 так, чтобы никакие три отмеченные точки не лежали на одной прямой.
(b) На доске 5×5 проведите как можно больше диагоналей клеток так, чтобы никакие две диагонали не имели общих точек (включая концы).

5. Линейное с параметрами.

- (a) В зависимости от α определите число решений уравнения $x + \alpha = |x - 2| + 3$.
(b) В зависимости от β определите число решений уравнения $x - \beta = |x + 3| - 2$.

6. Математическая индукция.

- (a) Докажите для $n \in \mathbb{N}$ тождество $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1) = n^2$.
(b) Докажите для $n \in \mathbb{N}$ тождество $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$.

7. Дополнительная задача.

Какое наименьшее значение может принимать выражение $s^3 + \frac{48}{s}$ при положительных s ?

* Каждая задача оценивается в 0, 1, 2, 3 или 4 балла. *

Гарантируемые нижние границы оценок:

было ↓	будет →	«5» за к/р	«4» за к/р	«3» за к/р	«2» за к/р
за коллоквиум «5»		22 балла	18 баллов	14 баллов	10 баллов
за коллоквиум «4»		18 баллов	14 баллов	10 баллов	6 баллов
за коллоквиум «3»		14 баллов	10 баллов	6 баллов	2 балла