Процессы и полуинварианты

1. В городе каждая площадь соседствует с нечетным число других. На каждой поднят белый или черный флаг. Каждый вечер флаг на одной из площадей заменяют на флаг того цвета, которого больше среди соседних с ней площадей. Докажите, что процесс когда-нибудь закончится. Верно ли, что когда-нибудь все флаги станут одного цвета?

2. На фестиваль военно-морской песни приглашены хоры из 100 стран. Каждый хор должен исполнить три песни, после чего сразу уехать домой (не выслушивая следующие песни). Ознакомившись с текстами песен, организаторы обнаружили, что каждая песня оскорбительна для одной из участвующих стран. Докажите, что порядок выступлений можно назначить так, чтобы никто не выслушивал более трех оскорбительных для его страны песен.

3. В графе степень каждой вершины равна 3. Ребра этого графа правильным образом покрашены в 3 цвета. Докажите, что при выкидывании ребра граф не теряет связность.

4. На ребрах полного графа написаны числа. Можно выбрать вершину и поменять знаки на всех ребрах из нее выходящих. Докажите, что такими операциями можно сделать сумму чисел по всем ребрам неотрицательной.

5. В лагерь приехало n школьников. У каждого не более 30 знакомых. Докажите, что можно так рассадить их в

   (a) 60 комнат,

   (b) 58 комнат,

   (c) кто меньше?

   чтобы ни в какой комнате не жили два знакомых и не существовало человека такого, что все его друзья живут в одной комнате.

6. Болото имеет форму двух концентрических кругов, и делится n радиусами на $2n$ частей. На болоте сидит $4n+1$ жаба. Если в какой-то части болота сидит хотя бы 3 жабы, то 3 из них перепрыгивают на соседние по стороне части, по одной на каждую часть. Верно ли, что в какой-то момент жабы перестанут прыгать? Докажите, что начиная с какого-то момента для каждой части будет верно, что или в ней или в соседней с ней есть жаба.

7. В парламенте каждый депутат враждует с тремя другими. Докажите, что их можно так разбить на две палаты, чтобы внутри каждой палаты у каждого было не более одного врага.

8. Квадратное поле разбито на сто одинаковых квадратных участков, девять из которых поросли бурьяном. Известно, что бурьян за год распространяется на те и только те участки, рядом с которыми не менее двух соседних (т. е. имеющих общую сторону) участков уже поросли бурьяном. Докажите, что поле никогда не зарастет бурьяном полностью.