Ориентированные площади

1. В выпуклом четырехугольнике каждая диагональ делит его на два равновеликих треугольника. Докажите, что он является параллелограммом.

2. **Равные площади.**

   (a) Найдите ГМТ X, таких что $S_{ACX} = S_{BCX}$, где ABC — данный треугольник.

   (b) Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

   (c) Найдите все точки X, такие что площади треугольников AXB, BXC, CXA равны.

   Определение. *Ориентированная площадь* $\overrightarrow{S}_{PQR}$ *треугольника* PQR — площадь треугольника PQR, взятая со знаком “+”, если вершины записаны в положительном порядке (против часовой стрелки), и со знаком “−”, иначе.

3. Даны отрезки A_1B_1, A_2B_2, … Что представляет собой множество X, таких что

$$\lambda_1 \overrightarrow{S}_{A_1XB_1} + \lambda_2 \overrightarrow{S}_{A_2XB_2} + \dots = d,$$

   где d — заданное действительное число?

4. **Теорема Ньютона.** Докажите, что в описанном четырехугольнике центр вписанной окружности лежит на отрезке, соединяющем середины диагоналей.

5. Пусть AA' и BB' — биссектрисы треугольника ABC. Докажите, что для любой точки X с отрезка $A'B'$ справедливо $a+b=c$, где a, b, c — расстояния от точки X до соответствующих сторон треугольника.

6. Докажите, что основания внешних биссектрис треугольника лежат на одной прямой.

7. Центры отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 расположены на одной прямой. Докажите, что 8 треугольников $A_iB_jC_k$ можно так разбить на 2 группы, что суммы площадей в группах равны.